Journal of Mineral Resources Engineering, 7(2): 67-81, (2022)

Imam Khomeini International University

Vol. 7, No. 2, Summer 2022

نشریه مهندسی منابع معدنی

Journal of Mineral Resources Engineering
(JMRE)

Research Paper

Improvement of the Focusing Inversion of Gravity Data with Hybrid Conjugate Gradient Parameter Method

Moazam S.[1], Aghajani H.[2*], Nejati Kalate A.[2]

1- Ph.D Student, Dept. of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
2- Associate Professor, Dept. of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Received: 06 Dec. 2020 **Accepted: 28 Feb. 2021**

Abstract: Potential field methods, such as the gravity technique, have become essential tools for exploration. Inversion of gravity data is the most important stage in the interpretation of the data. Inversion is a mathematical technique that constructs a geophysical subsurface model automatically from measured data by adding some prior knowledge. Inversion of gravity data is time-consuming and needs a long time because of numerous data and model parameters. Thus, a fast and effective inversion method is necessary to improve the speed of the inversion process. Many algorithms are available for focusing inversion of gravity data, such as the reweighted regularized conjugate gradient (RRCG) method. This method is iterative, and it takes a long time to converge to a solution. In this algorithm, there is a conjugate gradient parameter that is effective in inversion. In this paper, we used a hybrid conjugate gradient parameter method for focusing inversion of gravity data and compared the results with the conventional Fletcher-Reeves (FR) conjugate gradient parameter method. We applied this method for the data from a synthetic model and Shoaz iron ore deposit in Yazd, Iran. The inversion result indicated that the hybrid conjugate gradient parameter method converges to the solution faster than the FR method, while the results from both approaches have remarkable correlations with the true geological structures.

Keywords: Inverse modeling, RRCG algorithm, Gravity, Conjugate gradient parameter, Shoaz ore deposit.

How to cite this article
Moazam, S., Aghajani, H., and Nejati Kalate, A. (2022). *"Improvement of the focusing inversion of gravity data with hybrid conjugate gradient parameter method"*. Journal of Mineral Resources Engineering, 7(2): 67-81.
DOI: 10.30479/JMRE.2021.14683.1472

*Corresponding Author Email: *haghajani@shahroodut.ac.ir*

INTRODUCTION

Inversion of potential field data is the most critical stage in the quantitative interpretation of the data. The solution of the inverse problem is unstable and non-unique. The issues can be overcome by the Tikhonov regularization approach [1]. In this approach, the prior information is incorporated in the model by a stabilizing function (stabilizer) [2-4]. Some smooth stabilizers produce smooth models with fuzzy borders, while the focusing stabilizers reconstruct piecewise constant models with sharp boundaries [2].

On the other hand, Inversion of gravity data is time-consuming and needs a long time because of numerous data and model parameters. Thus, a fast and effective inversion method is necessary to improve the speed of inversion [5]. Many algorithms are available for focusing inversion of gravity data, such as the reweighted regularized conjugate gradient (RRCG) method. This method is iterative, and it takes a long time to converge to the solution [6]. In this algorithm, there is a conjugate gradient parameter that is effective in the number of iterations during the inversion process. This conjugate gradient parameter is calculated by the Fletcher-Reeves (FR) method [7]. In this paper, we used a hybrid conjugate gradient parameter method for focusing inversion of gravity data which is a combination of FR and PRP techniques. This method converges to the solution faster than the conventional FR method while both techniques produce similar solutions. The effectiveness of the method was evaluated by the data from a synthetic model with three blocks. The introduced technique was also applied to the real data from the Shoaz iron ore deposit in Yazd.

METHODS

The aim of the inversion is to use the measured gravity response data to recover the subsurface rock density contrast. An acceptable model is the one that makes a sufficiently small misfit. The regularization functional incorporates information about the basic properties of the type of models used in the inversion [8]. In this paper, we used the RRCG algorithm for focusing inversion of gravity data. In this algorithm, the step size and search direction are essential. In each iteration, a line search method computes a search direction and a step size and decides how far to move along this direction. The conjugate gradient parameter influences the search direction. The FR method is the conventional method for the conjugate gradient parameter [7]:

$$\beta_k^{FR} = \frac{\left\| \mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n+1})} \right\|^2}{\left\| \mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n})} \right\|^2} \tag{1}$$

Where:

$\mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n})}$: represents the gradient direction of the Tikhonov objective function in the nth iteration.

The FR : is characterized by a strong global convergence rate, but it is not computationally powerful due to the jamming phenomenon. It may take infinitely many steps without reaching the optimum.

Some methods such as PRP may not always converge, but they are often more efficient, computationally [9-13]:

$$\beta_k^{PRP} = \frac{\mathbf{I}^{\alpha T}_{(\mathbf{m}_{n+1})}\left(\mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n+1})} - \mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n})}\right)}{\left\| \mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n})} \right\|^2} \tag{2}$$

Hybridization is one of the popular approaches in modifying the conjugate gradient method. We have used the hybrid method as follows:

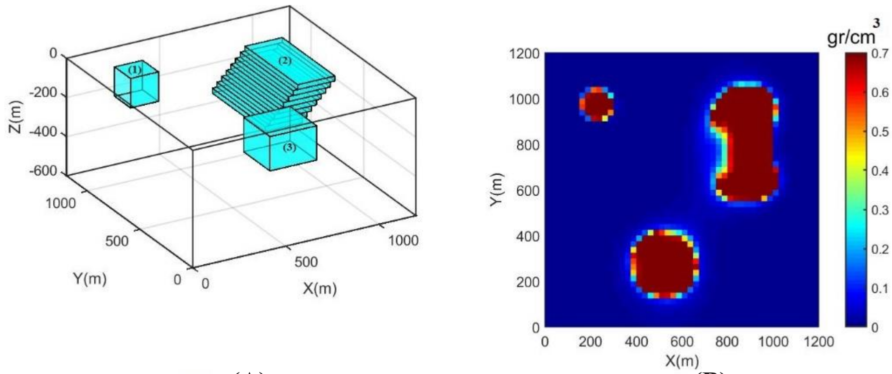
$$\beta_k = \max\left\{\beta_k^{FR}, \beta_k^{PRP}\right\} \tag{3}$$

Combining these classical methods in Equation 3 will allow us achieving a global convergence for the inverse problem with a better computational performance.

SYNTHETIC AND REAL EXAMPLES

The proposed method has been applied to synthetic data from a synthetic model with three blocks

(Figure 1A). The results indicate the new method has produced a focused solution (Figure 1B). One can see the new method is faster than the traditional approach (Table 1).



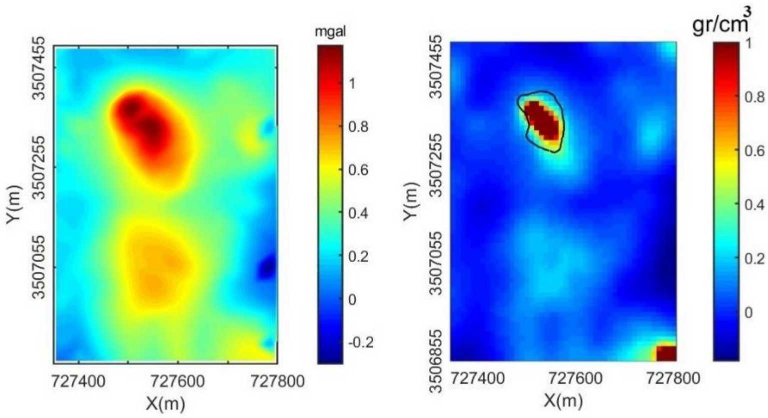
(A) (B)

Figure 1. A: 3D view of the synthetic model, **B:** Plan section through the recovered model at the depth of 100 m

Table 1. Times and iteration model

Model	Conjugate gradient parameter	Iteration	Time (s)
Synthetic	FR	1984	1929
	Hybrid	1865	1819
Shoaz	FR	55	11
	Hybrid	48	5/59

We have also applied the proposed method for inversion of gravity data over the Shoaz iron deposit to show the reliability of the new approach for gravity inversion. The results indicate that the new technique converges to the solution faster than the traditional method, while the results are geologically plausible (Figure 2).



(A) (B)

Figure 2. A: Residual gravity data over Shoaz Iron deposit, B: The plan section through the recovered model 40 m below surface and the black line is the border of the deposit

CONCLUSIONS

The inversion of gravity data is significant for the determination of the distribution of subsurface densities. The focusing inversion approach is a robust method for inversion of gravity data. The inversion process is slow. Thus, we have used a hybrid method for computing conjugate gradient parameter that combines the FR and PRP methods. The inversion results of synthetic and real data from the Shoaz iron deposit show that the hybrid technique is faster than the FR method to converge the solution. However, the models from both methods have good similarities with the actual structures.

REFERENCES

[1] Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. I. (1977). *"Solutions of ill-posed problems"*. Washington: New York: Winston; Distributed Solely by Halsted Press, pp. 258.

[2] Portniaguine, O., and Zhdanov, M. S. (1999). *"Focusing geophysicalinversion images"*. Geophysics, 64*:* 874-887.

[3] Portniaguine, O., and Zhdanov, M. S. (2002). *"3-D magnetic inversion with data compression and image focusing"*. Geophysics, 67(5): 1532-1541.

[4] Farquharson, C. G., Ash, M. R., and Miller, H. G. (2008). *"Geologically constrained gravity inversion for the Voisey's Bay ovoid deposit"*. The Leading Edge, 27(1): 64-69.

[5] Foks, N. L., Krahenbuhl, R., and Li, Y. (2014). *"Adaptive sampling of potential field data: A direct approach to compressive inversion Adaptive sampling and compressive inversion"*. Geophysics, 79(1): IM1-IM.

[6] Zhdanov, M. S. (2002). *"Geophysical inverse theory and regularization problems"*. Amsterdam: Elsevier Science, pp. 609.

[7] Fletcher, R., and Reeves, C. M. (1964). *"Function minimization by conjugate gradients"*. the Computer Journal, 7(2): 149-154.

[8] Zhdanov, M. S. (2015). *"Inverse theory and applications in geophysics"*. Elsevier Science, pp. 730.

[9] Hajar, N., Shapiee, N., Abidin, Z. Z., Khadijah, W., Rivaie, M., and Mamat, M. (2017). *"A new modified conjugate gradient coefficient for solving system of linear equations"*. In Journal of Physics: Conference Series, 890(1): 012108. IOP Publishing.

[10] Salleh, Z., and Alhawarat, A. (2016). *"An efficient modification of the Hestenes-Stiefel nonlinear conjugate gradient method with restart property"*. Journal of Inequalities and Applications, 110(2016). DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-016-1049-5.

[11] Abdullahi, I., and Ahmad, R. (2017). *"Global convergence analysis of a new hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization problems"*. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, 2(13): 40-48.

[12] Abdullahi, I., and Ahmad, R. (2016). *"Global convergence analysis of a nonlinear conjugate gradient method for unconstrained optimization problems"*. Indian Journal of Science and Technology, 9: 1-9.

[13] Abdullahi, I., and Ahmad, R. (2015). *"Convergence analysis of a new conjugate gradient method for unconstrained optimization"*. Applied Mathematical Sciences, 9: 6969-6984.

نشریه مهندسی منابع معدنی، سال ۱۴۰۱، دوره هفتم، شماره ۲، ص ۸۱-۶۷

دوره هفتم، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صفحه ۷۱ تا ۸۱

Vol. 7, No. 2, Summer 2022, pp. 71-81

نشریه مهندسی منابع معدنی

Journal of Mineral Resources Engineering (JMRE)

علمی-پژوهشی

بهبود سرعت مدل‌سازی وارون متمرکز داده‌های گرانی با استفاده از تعیین پارامتر گرادیان مزدوج به روش ترکیبی

سحر معظم[۱*]، حمید آقاجانی[۲]، علی نجاتی کلاته[۲]

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۱۶ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۱۰

چکیده

مدلسازی وارون داده‌های میدان پتانسیل روشی مهم در تفسیر کمی این داده‌ها است. افزایش سرعت مدلسازی وارون یکی از مسایل مهم در مدلسازی است، زیرا با توجه به وسعت منطقه و حجم داده‌های برداشتی و نیز افزایش تعداد پارامترهای مدل، به حجم زیاد حافظه رایانه و زمان زیاد پردازش نیاز است. روش‌های مختلفی در مدلسازی وارون برای افزایش سرعت مدلسازی ارایه شده است که یکی از این روش‌ها استفاده از الگوریتم حل دارای مرتبه تکرار مانند گرادیان مزدوج است. الگوریتم گرادیان مزدوج دوباره وزن‌دار منظم شده در مدلسازی وارون متمرکز داده‌های گرانی استفاده می‌شود. پارامتر گرادیان مزدوج یکی از عوامل سرعت رسیدن به جواب در این الگوریتم است. در این مقاله روش جدیدی برای محاسبه پارامتر گرادیان مزدوج به نام روش ترکیبی ارایه شده است که ترکیبی از روش فلچر- ریورز و PRP است. این روش نسبت به روش سنتی فلچر با سرعت بهتری به جواب همگرا می‌شود، در حالی که روش ترکیبی و فلچر نتایج مشابهی را ارایه می‌دهند. کارآیی این روش با کمک داده‌های حاصل از یک مدل مصنوعی که از سه بلوک تشکیل شده است، بررسی شد و نتایج به دست آمده نشان داد که این روش نسبت به روش سنتی سریع‌تر است. همچنین روش پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی کانسار آهن شواز در یزد اعمال شد و سرعت مدلسازی وارون بهبود یافت. نتایج مدلسازی وارون با اطلاعات حاصل از حفاری انطباق مناسبی دارد.

کلمات کلیدی

مدلسازی وارون، الگوریتم RRCG، گرانی، پارامتر گرادیان مزدوج، کانسار شواز.

استناد به این مقاله

معظم، س.، آقاجانی، ح.، نجاتی کلاله، ع.؛ ۱۴۰۱؛ "**بهبود سرعت مدل‌سازی وارون متمرکز داده‌های گرانی با استفاده از تعیین پارامتر گرادیان مزدوج به روش ترکیبی**". نشریه مهندسی منابع معدنی، دوره هفتم، شماره ۲، ص ۸۱-۶۷.

DOI: 10.30479/JMRE.2021.14683.1472

[*] نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات **Email: haghajani@shahroodut.ac.ir**

۱- مقدمه

روش‌های ژئوفیزیکی، از جمله روش‌های میدان پتانسیل مانند گرانی‌سنجی، ابزار مهمی برای اکتشاف و شناسایی هرچه بهتر مواد معدنی، ساختارهای زمین‌شناسی و حوضه‌های رسوبی در مراحل ابتدایی کار هستند و نقش مهمی در کاهش ریسک و نیز افزایش سرعت عملیات اکتشافی دارند. روش‌های میدان پتانسیل با اندازه‌گیری‌های میدان‌های طبیعی که داخل زمین گسترش می‌یابند، شناخته می‌شوند. این میدان‌ها بر اساس ویژگی‌های فیزیکی زمین مانند تغییرات چگالی و یا تغییرات خودپذیری مغناطیسی سنگ‌های تشکیل‌دهنده زمین ایجاد می‌شوند [۱].

ارایه مدل مناسب برای تفسیر ناهنجاری‌های میدان پتانسیل بسیار بااهمیت است. مدلسازی وارون یک روش ریاضی است که با وارد کردن اطلاعات اولیه، به طور خودکار پارامترهای فیزیکی مورد بررسی را از داده‌های مشاهده‌ای و با کمک عملگرهای ریاضی بازسازی می‌کند [۲]. در این روش مقادیر داده‌های مشاهده‌ای، پارامترهای مدل را به گونه‌ای برآورد می‌کنند که داده‌های محاسبه‌ای با استفاده از پارامترهای مدل به دست آمده، برازشی مناسب با داده‌های مشاهده‌ای داشته باشند. در مسایل وارون خطی داده‌های گرانی رابطه میان داده‌ها و پارامترهای مدل (چگالی سنگ‌ها) خطی است [۳].

در مسایل وارون خطی مشکل اصلی عدم یکتایی جواب است؛ زیرا مطابق نظریه گوس، بی‌نهایت مدل وجود دارد که داده‌های میدان پتانسیل را به خوبی توجیه می‌کند [۴]. همچنین فرآیند حل مسایل وارون اغلب ممکن است به شدت ناپایدار باشد. به طوری که تغییرات کوچکی در مقدار داده‌ها ممکن است به تغییرات شدیدی در مدل تخمین زده منجر شود و مدل‌های غیرواقعی تولید کند؛ که به این مسایل، مسایل بدحالت گویند [۵]. تیخونوف نشان داد که مسایل بدحالت را می‌توان حل کرد. به این منظور نظریه منظم‌سازی برای حل مسایل بدحالت ارایه شد [۶]. عدم یکتایی مسایل وارون را می‌توان با استفاده از اطلاعات اولیه مانند اطلاعات زمین‌شناسی برطرف کرد [۷]. این اطلاعات به وسیله تابع پایدارساز در مساله وارد می‌شود. چندین روش برای وارد کردن اطلاعات اولیه به تابع هدف به کمک تابع پایدارساز ارایه شده است [۱۰-۸].

در اکتشاف مواد معدنی یکی از مهم‌ترین مسایل در تفسیر داده‌های میدان پتانسیل، تعیین مرز مشخص بین مواد معدنی و سنگ‌های دربرگیرنده است. با استفاده از روش‌های وارون‌سازی متمرکز می‌توان مدل‌هایی با مرزهای واضح‌تر و تیزتر به دست آورد که در آن‌ها مقادیر پارامترهای مدل حاصل شده به مقادیر واقعی نزدیک‌تر است، بنابراین این روش‌های مدلسازی اهمیت زیادی دارند [۹،۸].

پرتیناگواین و ژدانوف روش وارون‌سازی متمرکز را برای وارون‌سازی دوبعدی داده‌های گرانی و مغناطیس به کار بردند، همچنین آنها این روش را برای وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های مغناطیس توسعه دادند [۹]. محققان بسیاری از روش‌های مختلف مدلسازی وارون متمرکز استفاده کرده‌اند [۱۶-۱۱].

مشکل دیگری که در مسایل وارون وجود دارد، زمان زیادی است که برای حل مساله وارون مورد نیاز است. در بیشتر روش‌های وارون‌سازی داده‌های گرانی، با توجه به حجم زیاد داده‌های برداشت شده بر روی مناطق اکتشافی با کمک دستگاه‌های اندازه‌گیری جدید و افزایش تعداد پارامترهای مدل، به حجم زیاد حافظه رایانه و زمان زیاد پردازش نیاز است [۲]. روش‌های مختلفی در مدلسازی وارون برای افزایش سرعت مدلسازی ارایه شده است که یکی از این روش‌ها استفاده از الگوریتم حل دارای مرتبه تکرار مانند گرادیان مزدوج است [۱۷]. پیلکینگتون روشی برای مدلسازی وارون هموار سه‌بعدی داده‌های مغناطیس بر اساس روش گرادیان مزدوج ارایه کرد که این روش قابلیت اعمال بر روی مدل‌های بزرگ که در آن‌ها تعداد داده‌ها و پارامترهای مدل زیاد است را دارد. ژدانوف برای حل مساله وارون متمرکز، روش گرادیان مزدوج دوباره وزن‌دار منظم شده (Reweighted regularized conjugate gradient (RRCG)) را ارایه کرده که برای کمینه کردن تابع هدف با توابع منظم‌ساز مختلف استفاده شده است [۱۸،۱۱]. این روش با سرعت مناسبی به جواب همگرا می‌شود. کوما و همکاران برنامه‌نویسی موازی وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های میدان پتانسیل را معرفی کردند. آنها روش گرادیان مزدوج دوباره وزن‌دار منظم شده را برای کمینه کردن تابع هدف و وارد کردن طیف گسترده از توابع منظم‌سازی به کار بردند. در ادامه آن‌ها با کمک پردازشگرهای گرافیکی سرعت اجرای برنامه را افزایش دادند [۱۴]. رضایی و همکاران الگوریتم دوباره وزن‌دار منظم شده بر اساس دو قطری‌سازی لنکسوز را برای مدلسازی وارون متمرکز سریع دادهای میدان پتانسیل ارایه کردند [۱۹]. سان و همکاران از روش گرادیان غیریکنواخت برای مدلسازی وارون داده‌های هوابرد تانسور گرادیان گرانی

استفاده کردند. این روش نوعی گرادیان نزولی مانند گرادیان مزدوج است که برای سرعت بخشیدن به نرخ همگرایی مدلسازی وارون استفاده شده است [۲۰].

همان‌طور که بیان شد پرتیناگواین و ژدانوف [۸] روشی ساده برای حل مساله وارون متمرکز داده‌های میدان پتانسیل بر اساس الگوریتم RRCG را توسعه دادند [۱۱]. در این الگوریتم پارامتر گرادیان مزدوج تاثیر زیادی در سرعت رسیدن به جواب دارد [۲۱،۲۲]. روش‌های دیگری نیز توسط ریاضی‌دانان برای انتخاب پارامتر گرادیان مزدوج، به منظور وارون‌سازی بدون قید برای مسایل وارون در ریاضیات ارایه شده است [۲۱-۲۴،۱۷].

در الگوریتم RRCG پارامتر گرادیان مزدوج با استفاده از رابطه فلچر و ریوز محاسبه شده است [۲۴]. پولاک و ریبره روش PRP را برای محاسبه این پارامتر ارایه کردند [۲۳]. در این مقاله ترکیب رابطه فلچر- ریوز و PRP برای انتخاب پارامتر گرادیان مزدوج در الگوریتم RRCG استفاده شده است تا سرعت رسیدن به جواب نسبت به روش سنتی بهبود یابد.

۲- مدلسازی وارون با استفاده از روش RRCG

در مدلسازی داده‌های گرانی رابطه بین پارامترهای مدل و داده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Am = b \qquad (۱)$$

که در آن:

$b \in R^N$: بردار داده‌های اندازه‌گیری شده

$m \in R^M$: بردار پارامترهای مدل (چگالی)

$A \in R^{N\times M}$: ماتریس هسته که ارتباط بین داده و پارامترهای مدل را برقرار می‌کند [۵].

برای محاسبه میدان گرانی در مدلسازی وارون خطی داده‌ها، زیر سطح زمین را به بلوک‌های کوچکی با ابعاد معین تقسیم کرده و سپس توزیع چگالی کانی‌ها و سنگ‌ها در زیر سطح زمین برای هر یک از بلوک‌ها در طی فرآیند وارون‌سازی تخمین زده می‌شود؛ به طوری که مدل ارایه شده از نظر زمین‌شناسی قابل قبول باشد [۲۵]. در این تحقیق برای محاسبه درایه‌های ماتریس هسته از روش ترکیبی پلوف و جرم نقطه‌ای که معظم و همکاران ارایه کردند، استفاده شده است [۲۵].

در مدلسازی وارون برای محاسبه پارامترهای مدل، از کمینه کردن تابع هدف تیخونوف استفاده می‌شود که از یک تابع عدم برازش و یک تابع پایدارساز تشکیل شده است [۹].

$$P^{\alpha}(\mathbf{m}) = \Phi(\mathbf{m}) + \alpha\Omega(\mathbf{m}) \qquad (۲)$$

که در آن:

$\Phi(\mathbf{m})$: تابع عدم برازش که وظیفه برازش بین داده‌های اندازه‌گیری شده با داده‌های محاسبه‌ای حاصل از پارامترهای مدل را دارد.

α : پارامتر منظم‌سازی که ارتباط بین تابع عدم برازش و تابع منظم‌ساز را به بهترین شکل برقرار می‌کند. ژدانوف روش تطبیقی مرحله‌ای را برای تعیین پارامتر منظم‌سازی ارایه کرده است که در الگوریتم RRCG از آن استفاده می‌شود [۱۱].

$\Omega(\mathbf{m})$: تابع پایدارساز و نقش اصلی آن انتخاب مناسب مدل در حل مساله وارون است. در مدلسازی وارون متمرکز توابع پایدارساز متمرکز می‌توانند مدل‌هایی با تصاویر متمرکز یا بلوکی ارایه کنند [۹،۸].

پرتیناگواین و ژدانوف روشی ساده برای حل مساله وارون متمرکز داده‌های میدان پتانسیل بر اساس الگوریتم گرادیان مزدوج دوباره وزن‌دار منظم شده (RRCG) را توسعه دادند [۱۱،۱۸]. در این حالت تابع هدف به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P^{\alpha}(\mathbf{m},\mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{m}) + \alpha\Omega(\mathbf{m}) = \left(\mathbf{W}_d\mathbf{A}(\mathbf{m}) - \mathbf{W}_d\mathbf{b}\right)^T \ldots$$
$$\left(\mathbf{W}_d\mathbf{A}(\mathbf{m}) - \mathbf{W}_d\mathbf{b}\right) + \alpha\left(\mathbf{W}_e\mathbf{W}_m\mathbf{m}\right)^T\left(\mathbf{W}_e\mathbf{W}_m\mathbf{m}\right) \qquad (۳)$$

که در آن:

$\mathbf{w}_d$: ماتریس وزنی داده‌ها که بر اساس انحراف معیار نوفه تخمینی موجود در داده‌ها σ به دست می‌آید:

$$\mathbf{W}_d = \mathbf{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i},\ldots,\frac{1}{\sigma_N}\right) \qquad (۴)$$

همچنین $\mathbf{W}_e$ ماتریس وزنی پایدارساز است و به صورت ماتریس قطری است، که برای تابع پایدارساز پشتیبان کمینه (Minimum Support: MS) از رابطه ۵ محاسبه می‌شود [۱۸،۱۱]. تابع پشتیبان کمینه (MS) به دنبال یافتن توزیع پارامترهای مدل با کمترین حجم (فشردگی) است به گونه‌ای که بتواند توده‌های عامل بی‌هنجاری را به صورت متمرکز و با مرزهای تیز بازسازی کند [۸].

$$\mathbf{W}_e^{MS} = \mathbf{diag}\left[\frac{1}{\left(m^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}}\right] \qquad (۵)$$

که در آن:

ε : مقدار عددی کوچک که به آن پارامتر تمرکز گفته می‌شود.

$\mathbf{W}_m$: ماتریس وزنی عمقی است:

$$\mathbf{W}_m = diag\left[\frac{1}{z}\right] \quad (۶)$$

که در آن:

z : برابر عمق پارامتر مدل است. هدف از به کار بردن تابع وزنی عمقی، خنثی کردن عدم حساسیت داده‌ها نسبت به پارامترهای مدل در عمق است [۷].

روش گرادیان مزدوج روشی بر اساس نظریه بیشترین شیب است و روند تکرار گرادیان مزدوج منظم شده مانند روش گرادیان مزدوج معمولی بر مبنای محاسبه جهت بیشترین شیب منظم شده تابع هدف است و در هر مرحله تکرار جواب به شکل زیر محاسبه می‌شود [۱۱]:

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \delta\mathbf{m} = \mathbf{m}_n - k_n^{\alpha}\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_n) \quad (۷)$$

که در آن:

k_n^{α} : طول گام

$\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_n)$: ماتریس ستونی که جهت گرادیان مزدوج تابع هدف است. این ماتریس بر اساس روابط زیر و با استفاده از جهت بیشترین شیب ($\mathbf{I}^{\alpha}(\mathbf{m}_n)$) قابل محاسبه است:

$$\mathbf{I}^{\alpha}(\mathbf{m}_n) = \mathbf{A}^T\mathbf{W}_d^2\left(\mathbf{A}(\mathbf{m}_n) - \mathbf{b}\right) + \alpha\mathbf{W}_{en}^2\mathbf{W}_m^2(\mathbf{m}_n) \quad (۸)$$

در روش RRCG بر اساس جستجوی خطی پیوسته جهت گرادیان مزدوج $\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_n)$ در مرحله نخست مطابق الگوریتم زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_0) = \mathbf{I}^{\alpha}(\mathbf{m}_0) = \mathbf{A}^T\mathbf{W}_d^2\left(\mathbf{A}(\mathbf{m}_0) - \mathbf{b}\right) + \alpha\mathbf{W}_{e0}^2\mathbf{W}_m^2(\mathbf{m}_0) \quad (۹)$$

در مراحل بعد جهت شیب، ترکیب خطی از بیشترین شیب منظم شده در این مرحله و جهت افزایش $\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_0)$ در مرحله پیشین است.

$$\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_1) = \mathbf{I}^{\alpha}(\mathbf{m}_1) + \beta_1^{\alpha}\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_0)$$

بنابراین در مرحله $(n+1)$ام خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_{n+1}) = \mathbf{I}^{\alpha}(\mathbf{m}_{n+1}) + \beta_{n+1}^{\alpha}\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_n) \quad (۱۰)$$

که در آن جهت شیب منظم شده با استفاده از رابطه ۸ محاسبه می‌شود. طول گام هر مرحله تکرار که با ضریب k_n^{α} بیان می‌شود را می‌توان با استفاده از یک جستجوی خطی یا سهمی‌گون محاسبه کرد:

$$P^{\alpha}(\mathbf{m}_{n+1}) = P^{\alpha}\left(\mathbf{m}_n - k_n^{\alpha}\tilde{\mathbf{I}}_n^{\alpha}\right) = \min \quad (۱۱)$$

با کمینه کردن رابطه ۱۱ بهترین تخمین برای طول گام با استفاده از جستجوی خطی رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k_n^{\alpha} = \frac{\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha T}(\mathbf{m}_n)\mathbf{I}^{\alpha}(\mathbf{m}_n)}{\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha T}(\mathbf{m}_n)\left(\mathbf{A}^T\mathbf{W}_d^2\mathbf{A} + \alpha\mathbf{W}_{en}^2\mathbf{W}_m^2\right)\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_n)} \quad (۱۲)$$

در روش گرادیان مزدوج مقدار جهت شیب گرادیان مزدوج باید محاسبه شود به گونه‌ای که بردارهای $\tilde{\mathbf{I}}^{\alpha}(\mathbf{m}_n)$ باید دو به دو مزدوج باشند. این امر زمانی محقق می‌شود که پارامتر گرادیان مزدوج (β_n) از رابطه ۱۳ محاسبه شود [۲۴]:

$$\beta_k^{FR} = \frac{\left\|\mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_{n+1})}\right\|^2}{\left\|\mathbf{I}^{\alpha}_{(\mathbf{m}_n)}\right\|^2} \quad (۱۳)$$

با توجه به روابط یاد شده β_n نقش مهمی در تعیین جهت و مقدار $\delta\mathbf{m}$ دارد، بنابراین تعیین مناسب این پارامتر در هر مرحله تکرار نقش مهمی در تعیین تعداد مراحل تکرار دارد. بر اساس روابط ۹، ۱۰ و ۱۲ می‌توان $\mathbf{m}$ را در هر مرحله تکرار به دست آورد. به این روش گرادیان مزدوج دوباره وزن‌دار منظم شده گویند، زیرا ماتریس وزنی $\mathbf{W}_{en}$ در هر مرحله تکرار تغییر می‌کند [۸].

در این الگوریتم برای تعیین پارامتر منظم‌سازی از یک روش تطبیقی استفاده می‌شود که در آن مقدار پارامتر منظم‌سازی در هر مرحله تکرار با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شود [۱۱]. در این روش ابتدا مساله وارون در اولین مرحله تکرار بدون منظم‌سازی ($\alpha_0 = 0$) حل می‌شود، سپس مقدار α_1 با استفاده از مقدار جواب $\mathbf{m}_1$ و رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha_1 = \frac{\left\|\mathbf{W}_d\mathbf{A}(\mathbf{m}_1) - \mathbf{W}_d\mathbf{b}\right\|^2}{\left\|\mathbf{W}_m\mathbf{m}_1\right\|^2} \quad (۱۴)$$

به خاطر دوباره وزن‌دار شدن ممکن است تابع پایدارساز در هر مرحله تکرار تغییر و حتی افزایش پیدا کند که این مساله باعث دور شدن تابع هدف از مقدار کمینه می‌شود، بنابراین پارامتر منظم‌سازی در هر مرحله تکرار باید طوری تغییر کند که اثر افزایش تابع پایدارساز کاهش یابد. تابع پایدارساز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(\mathbf{m}_{n+1}) = (\mathbf{m}_{n+1})^T\mathbf{W}_{e(n+1)}^2\mathbf{W}_m^2(\mathbf{m}_{n+1}) = \gamma\Omega(\mathbf{m}_n) \quad (۱۵)$$

که در آن:

$$\gamma = \frac{\Omega(\mathbf{m}_{n+1})}{\Omega(\mathbf{m}_n)} = \frac{(\mathbf{m}_{n+1})^T \mathbf{W}_{e(n+1)}^2 \mathbf{W}_m^2 (\mathbf{m}_{n+1})}{(\mathbf{m}_n)^T \mathbf{W}_{e(n)}^2 \mathbf{W}_m^2 (\mathbf{m}_n)} \quad (۱۶)$$

برای اطمینان از همگرایی تابع هدف به کمینه سراسری، از روش تطبیقی با کاهش پارامتر منظم‌سازی α_{n+1} استفاده می‌شود. در این روش اگر $\gamma > 1$ باشد، پارامتر منظم‌سازی به شکل زیر تعدیل می‌شود:

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n, & if\ \gamma \le 1, \\ \alpha_n / \gamma, & if\ \ \gamma > 1. \end{cases} \quad (۱۷)$$

بنابراین، حاصلضرب پارامتر منظم‌سازی α_{n+1} و پایدارساز $\Omega(\mathbf{m}_{n+1})$ کاهش می‌یابد یا تغییر نمی‌کند.

$$\alpha_{n+1}\Omega(\mathbf{m}_{n+1}) = \begin{cases} \alpha_n\Omega(\mathbf{m}_{n+1}) = \alpha_n\gamma\Omega(\mathbf{m}_n), & if\ \gamma \le 1, \\ \alpha_n\Omega(\mathbf{m}_{n+1}) / \gamma = \alpha_n\Omega(\mathbf{m}_n), & if\ \ \gamma > 1. \end{cases} \quad (۱۸)$$

همچنین اگر عدم برازش به اندازه کافی سریع کاهش نیابد، یعنی:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{W}_d\mathbf{A}(\mathbf{m}_n) - \mathbf{W}_d\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{W}_d\mathbf{A}(\mathbf{m}_{n+1}) - \mathbf{W}_d\mathbf{b}\|^2 \\ &< 0.01\|\mathbf{W}_d\mathbf{A}(\mathbf{m}_n) - \mathbf{W}_d\mathbf{b}\|^2 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

باید مجددا پارامتر منظم‌ساز α_{n+1} را با استفاده از رابطه زیر کاهش داد:

$$\alpha'_{n+1} = q\alpha_{n+1}, \quad q < 1 \quad (۲۰)$$

تجربه نشان داده است که مقدار ضریب تجربی q در بازه ۰/۵ تا ۰/۹ است [۱۱] که در آن α_n مقادیر بعدی پارامتر منظم‌سازی است. فرآیند مرحله تکرار تا زمانی که عدم برازش به مقدار دلخواه ε_0 برسد ادامه دارد.

$$\phi(\mathbf{m}_N) = \|Am - b\|^2 \le \varepsilon_0 \quad (۲۱)$$

همان‌طور که قبلا گفته شد، β_n نقش مهمی در تعیین جهت و مقدار $\delta\mathbf{m}$ و نیز در تعیین تعداد مراحل تکرار الگوریتم گرادیان مزدوج دارد [۲۷،۲۶،۲۱].

روش فلچر- ریوز (رابطه ۱۳) از نظر همگرایی به جواب قوی است، اما ممکن است با تعداد مراحل تکرار زیادی به جواب همگرا شود. ولی روش PRP معمولا از نظر محاسباتی بهتر عمل می‌کند [۲۳]:

$$\beta_k^{PRP} = \frac{\mathbf{I}_{(\mathbf{m}_{n+1})}^{\alpha T}\left(\mathbf{I}_{(\mathbf{m}_{n+1})}^{\alpha} - \mathbf{I}_{(\mathbf{m}_n)}^{\alpha}\right)}{\left\|\mathbf{I}_{(\mathbf{m}_n)}^{\alpha}\right\|^2} \quad (۲۲)$$

روش‌های ترکیبی برای تضمین همگرایی و بهبود سرعت رسیدن به جواب در الگوریتم گرادیان مزدوج ارایه شده است [۲۸-۳۳،۲۱]. در این مقاله برای تعیین روش پارامتر گرادیان مزدوج در الگوریتم RRCG از ترکیب دو روش فلچر- ریوز و PRP استفاده شده است. به صورتی که:

$$\beta_k = \max\left\{\beta_k^{FR}, \beta_k^{PRP}\right\} \quad (۲۳)$$

با این کار می‌توان تعداد مراحل تکرار الگوریتم RRCG را برای رسیدن به جواب کاهش داد.

۳- مدل مصنوعی

برای ارزیابی نتایج حاصل از روشی تلفیقی مورد اشاره به بررسی کارآیی روش روی داده‌های مصنوعی و داده‌های واقعی نیاز است. در این بخش، یک مدل مصنوعی با سه بلوک ارایه و برای مقایسه دو پارامتر گرادیان مزدوج از آن استفاده شده است. این سه بلوک با ابعاد متفاوت و در اعماق مختلف قرار گرفته‌اند. داده‌های به دست آمده از مدل بر روی شبکه‌ای منظم با فواصل ۲۵×۲۵ متری و با گسترش ۱۲۰۰×۱۲۰۰ متر محاسبه شده است. محدوده مدلسازی به سلول‌های مکعبی با ابعاد ۲۵ متر تقسیم شده است. نمای سه‌بعدی بلوک‌های مدل در شکل ۱- الف نشان داده شده است.

محل قرارگیری و ابعاد بلوک‌های تشکیل‌دهنده مدل در جدول ۱ نشان داده شده است. اختلاف چگالی بلوک با سنگ‌های اطراف ۰/۷ گرم بر سانتی‌متر مکعب در نظر گرفته شده است. تعداد پارامترهای مدل برابر با ۵۵۲۹۶=۲۴×۴۸×۴۸ است. به داده‌های حاصل از مدل پنج درصد نوفه با توزیع نرمال به داده‌ها اضافه شد (شکل ۲).

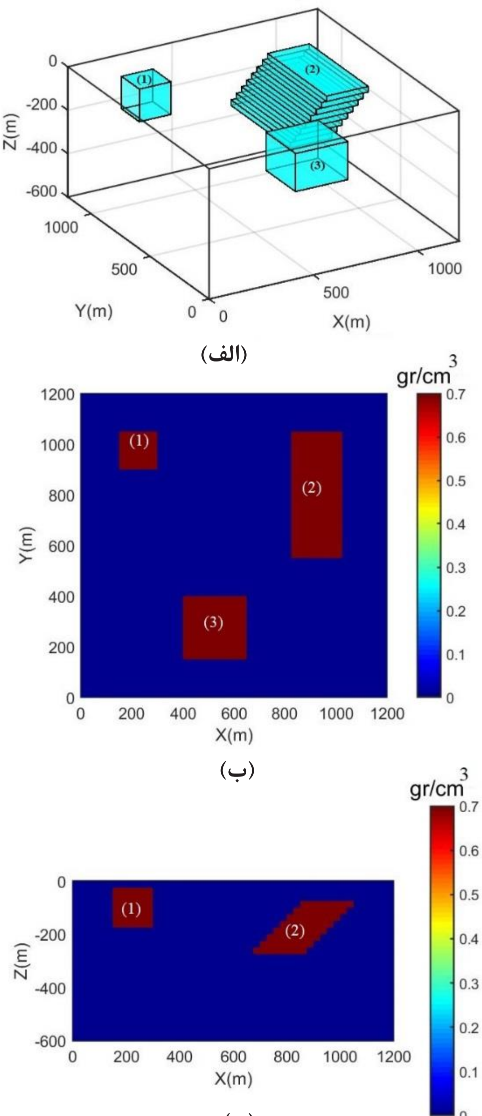
بر روی داده‌های حاصل از مدل، وارون‌سازی متمرکز با استفاده از الگوریتم RRCG اعمال و هر دو روش پیشنهادی با دقت مناسب به جواب همگرا شد. در شکل ۳ نقشه داده‌های حاصل از مدلسازی وارون با استفاده از دو روش فلچر و ترکیبی نشان داده شده است. شکل ۴ اختلاف بین داده‌های حاصل از

جدول ۱: موقعیت و ابعاد بلوک‌های تشکیل‌دهنده مدل مصنوعی

شماره مدل	ابعاد بلوک (متر)	عمق از سطح زمین (متر)
(۱)	۱۵۰ × ۱۵۰ × ۱۵۰	-۲۵
(۲)	۲۰۰ × ۵۰۰ × ۲۰۰	-۷۵
(۳)	۲۵۰ × ۲۵۰ × ۱۷۵	-۱۰۰

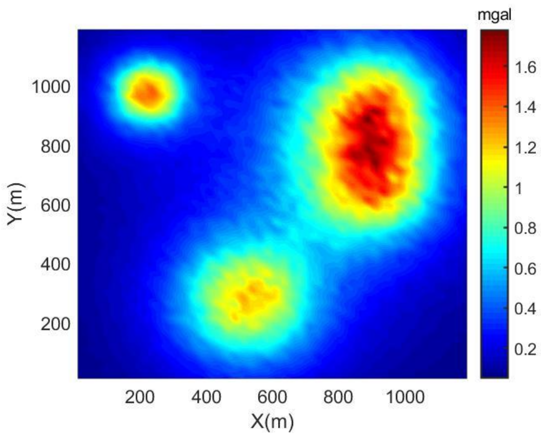
مدل مصنوعی و مدلسازی وارون را نمایش می‌دهد که بیانگر برازش خوب بین داده‌های حاصل از مدل مصنوعی و مدلسازی وارون است.

همان‌طور که بیان شد، هدف از این مدلسازی مقایسه تاثیر دو پارامتر گرادیان مزدوج فلچر و روش ترکیبی بر سرعت مدل‌سازی وارون بوده است. به این منظور وارون‌سازی با هر دو روش انجام و نتایج مقایسه شد (شکل‌های ۵ و ۶). مطابق

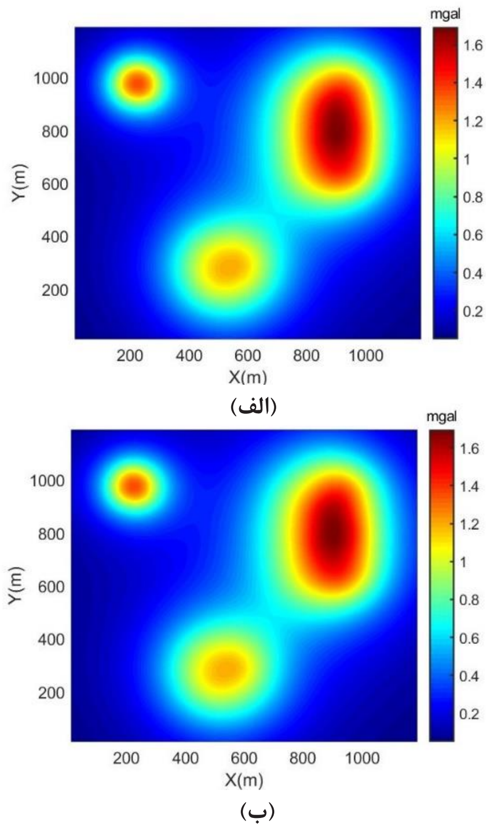


شکل ۱: الف) نمای سه‌بعدی از موقعیت بلوک‌ها در مدل مصنوعی، ب) برش افقی در عمق ۱۵۰ متری از سطح زمین و ج) برش قائم در فاصله ۱۰۰۰ متری از مبدا موازی محور X

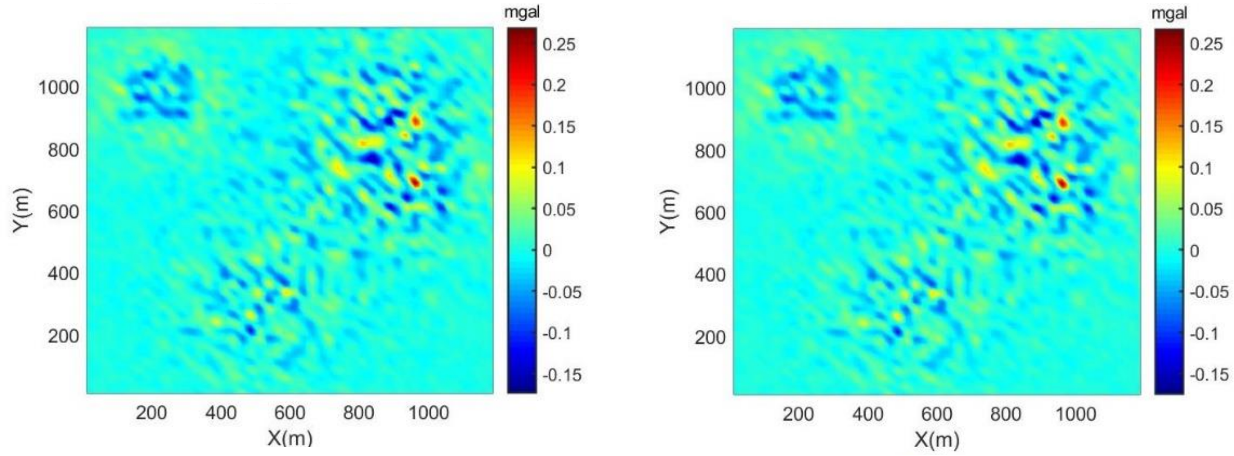
شکل‌های ۵ و۶، هر دو روش نتایج مشابهی در مدلسازی وارون بلوک‌ها داشته و به خوبی آن‌ها را آشکارسازی کرده‌اند.



شکل ۲: نقشه آنومالی گرانی حاصل از داده مصنوعی (با ۵٪ نوفه)

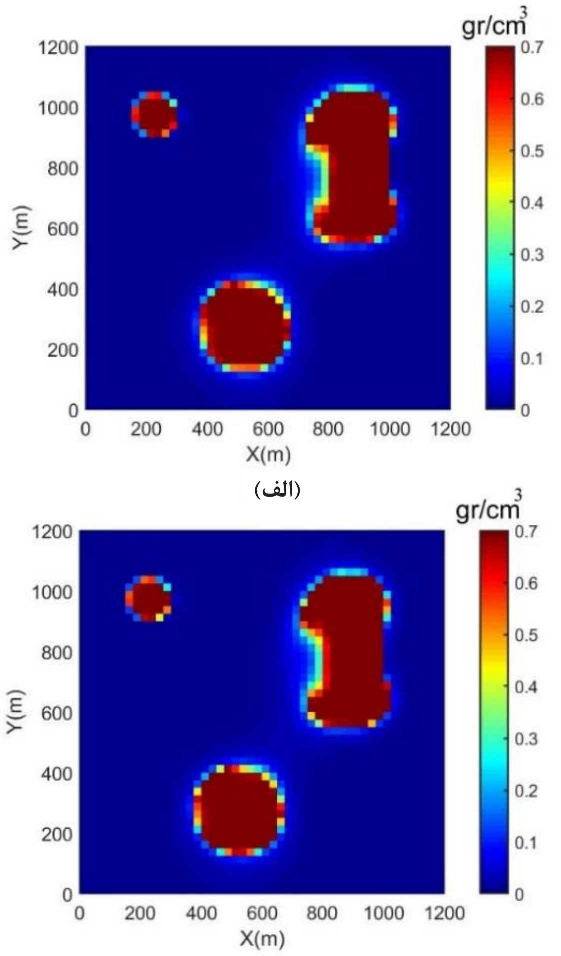


شکل ۳: نقشه آنومالی گرانی حاصل از نتایج مدلسازی وارون با الف) پارامتر گرادیان مزدوج فلچر، ب) پارامتر گرادیان مزدوج روش ترکیبی



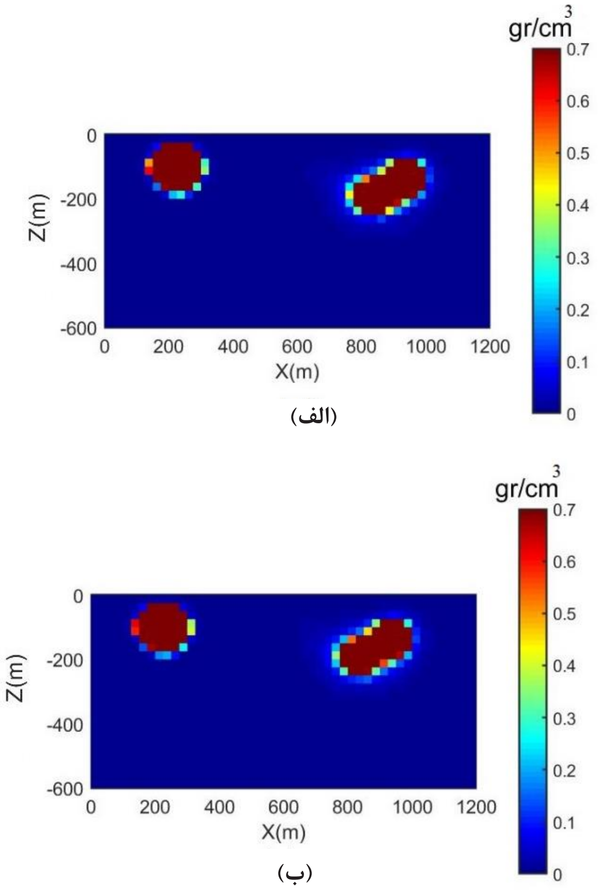
(الف) (ب)

شکل ۴: نقشه اختلاف گرانی داده حاصل از مدل مصنوعی و داده مدلسازی وارون با کمک الف) روش فلچر، ب) روش ترکیبی



(الف) (ب)

شکل ۵: برش افقی در عمق ۱۰۰ متری از سطح زمین؛ الف) در روش فلچر و ب) در روش ترکیبی



(الف) (ب)

شکل ۶: برش قائم مدل مصنوعی حاصل از وارون‌سازی در فاصله ۱۰۰۰ متری از مبدا موازی محور X؛ الف) روش فلچر، ب) روش ترکیبی

مهم‌ترین تفاوت به کارگیری پارامتر گرادیان مزدوج فلچر و روش ترکیبی در زمان همگرا شدن به جواب و تعداد مراحل تکرار است. در جدول ۲ زمان و تعداد مرحله تکرارها آورده شده است و همان‌طور که دیده می‌شود سرعت رسیدن به جواب در روش ترکیبی سریع‌تر است.

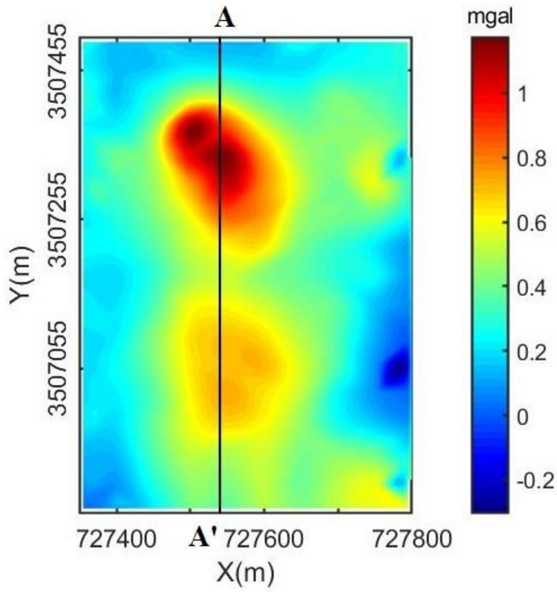
جدول ۲: مقایسه زمان و مرحله تکرار

مدل	پارامتر گرادیان مزدوج	مراحل تکرار	زمان (ثانیه)
مصنوعی	فلچر	۱۹۸۴	۱۹۲۹
	ترکیبی	۱۸۶۵	۱۸۱۹
واقعی	فلچر	۵۵	۱۱
	ترکیبی	۴۸	۵٫۵۹

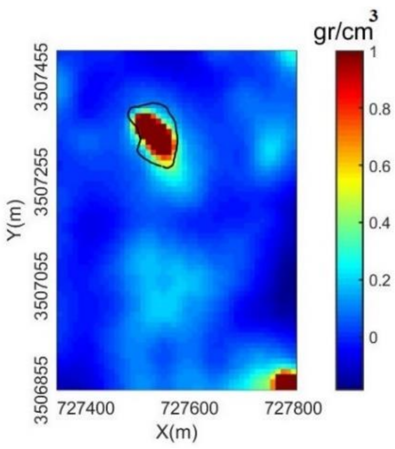
۴- داده‌های واقعی

کانسار آهن شواز در ایران مرکزی، در حاشیه زون سنندج -سیرجان و در جنوب غربی یزد واقع شده است. در این منطقه تعدادی عدسی با کانی‌سازی آهن که بیشتر از جنس منیتیت است، وجود دارد که تعدادی از آنها در مجاورت واحدهای کربناته کرتاسه و پرمین به وجود آمده و برخی نیز در مجاورت دایک‌های حدواسط تشکیل شده‌اند. این عدسی‌ها عموما در زیر آبرفت‌های عهد حاضر مدفون‌اند. در برخی نواحی نیز دگرسانی‌هایی رخ داده است و منیتیت به هماتیت تبدیل شده است. برداشت‌های گرانی‌سنجی در این منطقه با دقت ۰٫۰۱ میلی‌گال انجام شده است [۳۴]. ابعاد شبکه برداشت داده‌ها ۴۰×۵۰ متر است. آنومالی باقیمانده گرانی محدوده در شکل ۷ ارایه شده است.

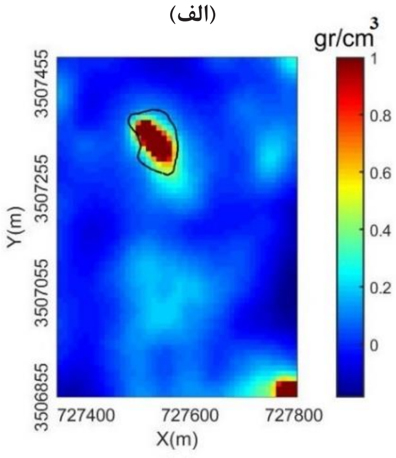
بر روی داده‌های منطقه مورد مطالعه مدلسازی وارون متمرکز با استفاده از الگوریتم RRCG و با به کارگیری دو پارامتر گرادیان مزدوج فلچر و روش ترکیبی انجام گرفته است. نتایج حاصل (جدول ۲) نشان می‌دهد که هر دو روش به جواب همگرا می‌شوند، ولی زمان رسیدن به همگرایی جواب در روش ترکیبی کمتر است. همان‌طور که دیده می‌شود روش فلچر با ۵۵ و روش ترکیبی با ۴۸ مرحله تکرار به جواب همگرا می‌شود. شکل ۸ برش افقی در عمق ۴۰ متری از سطح زمین است. در این شکل محدوده کانی‌سازی در این عمق که با استفاده از اطلاعات حفاری به دست آمده است، با خط مشکی نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، مرز ماده معدنی



شکل ۷: نقشه آنومالی باقیمانده گرانی منطقه شواز



(الف)



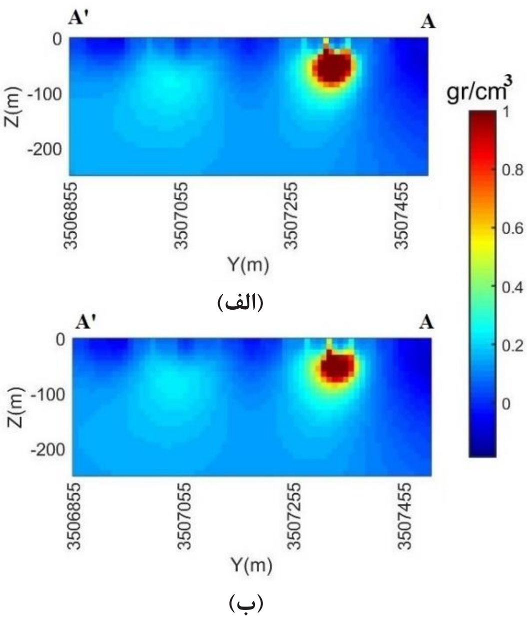
(ب)

شکل ۸: برش افقی در عمق ۴۰ متری از سطح زمین الف) روش فلچر و ب) روش ترکیبی (مرز ماده معدنی خط مشکی است.)

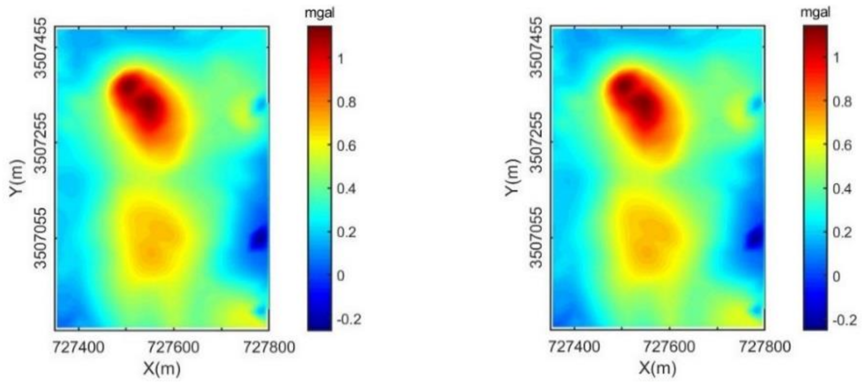
که حاصل از حفاری است، نتایج حاصل از مدلسازی وارون را تایید می‌کند و تطابق خوبی را با نتایج مدلسازی وارون دارد. در شکل ۹ نیز برش قائم مدل به دست آمده در امتداد خط A'-A در شکل ۷ به موازات محور Y آورده شده است. نقشه داده گرانی حاصل از مدلسازی وارون منطقه مورد مطالعه با استفاده از دو پارامتر گرادیان مزدوج فلچر و روش ترکیبی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. نقشه اختلاف گرانی حاصل از داده گرانی منطقه مورد مطالعه و داده‌های حاصل از مدلسازی وارون در شکل ۱۱ نشان داده شده است. مقدار عدم برازش در هر دو روش یکسان در نظر گرفته شده است.

۵- نتیجه‌گیری

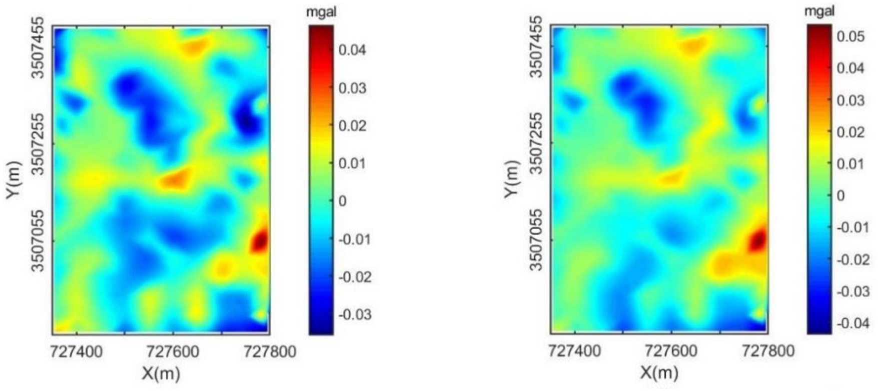
یکی از مسایل مهم در مدلسازی وارون زمان حل مساله وارون و بهبود سرعت رسیدن به جواب است. در این مقاله روش جدیدی برای محاسبه پارامتر گرادیان مزدوج الگوریتم RRCG در مدلسازی وارون متمرکز داده‌های گرانی استفاده شد. همان‌طور که در قسمت‌های قبل بیان شد، پارامتر گرادیان مزدوج در تعیین جهت و مقدار جواب و نیز در تعیین تعداد مراحل تکرار الگوریتم گرادیان مزدوج اهمیت دارد. نتایج حاصل از مدلسازی وارون داده‌های حاصل از مدل مصنوعی نشان می‌دهد که زمان و تعداد مراحل تکرار در روش پارامتر گرادیان مزدوج ترکیبی کمتر از روش فلچر است. در حالی که هر دو روش با دقت مشابه، به نتایج مشابه همگرا می‌شوند. در مدل واقعی کانسار شواز در یزد نیز همین نتایج به دست آمد. همچنین نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که، با توجه به ابعاد مدل، گسترش منطقه و تعداد داده برداشتی، تعداد مراحل تکرار و در نتیجه کاهش زمان مدلسازی وارون در هر محدوده متفاوت است، ولی در هر صورت با به کارگیری روش ترکیبی در انتخاب پارامتر گرادیان مزدوج می‌توان، سرعت مدلسازی وارون متمرکز داده‌های گرانی با استفاده از الگوریتم RRCG را افزایش داد. این موضوع در داده‌های واقعی که حجم پارامترها زیاد است بسیار اهمیت دارد.



شکل ۹: برش قائم مدل حاصل از داده‌های گرانی حاصل از وارون‌سازی در امتداد خط A'-A و به موازات محور Y؛ الف) روش فلچر، ب) روش ترکیبی



شکل ۱۰: نقشه آنومالی گرانی حاصل از نتایج به دست آمده از مدلسازی وارون منطقه شواز به کمک الف) پارامتر گرادیان مزدوج فلچر، ب) پارامتر گرادیان مزدوج روش ترکیبی



(ب) (الف)

شکل ۱۱: نقشه اختلاف گرانی حاصل از داده گرانی منطقه مورد مطالعه و داده مدلسازی وارون الف) فلچر، ب) روش ترکیبی

۶- مراجع

[۱] نوروزی، غ.؛ ۱۳۸۸؛ "**ژئوفیزیک اکتشافی**". چاپ اول، انتشارات دانشگاه تهران.

[2] Foks, N. L., Krahenbuhl, R., and Li, Y. (2014). *"Adaptive sampling of potential field data: A direct approach to compressive inversion Adaptive sampling and compressive inversion"*. Geophysics, 79(1): IM1-IM.

[۳] رضایی، م.، مرادزاده، ع.، نجاتی، ع.، آقاجانی، ح.؛ ۱۳۹۳؛ "**انتخاب خودکار پارامتر منظم سازی به روش اعتبار سنجی متقاطع تعمیم یافته در وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی**". سی و سومین گردهمایی ملی علوم زمین، سازمان زمین‌شناسی ایران، ۳ و ۴ اسفند.

[4] Blakely, R. J. (1996). *"Potential theory in gravity and applications"*. Cambridge University Press, pp. 441.

[5] Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2013). *"Parameter Estimation and Inverse Problems"*. Second Edition, Academic Press. US, pp. 360.

[6] Tikhonov, A. N., and Arsenin, V., I. (1977). *"Solutions of ill-posed problems"*. Washington: New York: Winston; Distributed Solely by Halsted Press, pp. 258.

[7] Li ,Y ,.and Oldenburg ,D .W .(1998) .*"3-D inversion of gravity data"*. Geophysics, 63(1): 109-119.

[8] Portniaguine, O., and Zhdanov, M. S. (1999). *"Focusing geophysicalinversion images"*. Geophysics, 64: 874-887.

[9] Portniaguine, O., and Zhdanov, M. S. (2002). *"3-D magnetic inversion with data compression and image focusing"*. Geophysics, 67(5): 1532-1541.

[10] Farquharson, C. G., Ash, M. R., and Miller, H. G. (2008). *"Geologically constrained gravity inversion for the Voisey's Bay ovoid deposit"*. The Leading Edge, 27(1): 64-69.

[11] Zhdanov ,M .S .(2002) .*"Geophysical inverse theory and regularization problems"*. Amsterdam: Elsevier Science, pp. 609.

[12] Zhdanov, M. S. (2009). *"New advances in regularized inversion of gravity and electromagnetic data"*. Geophysical Prospecting, 57(4): 463-478.

[13] Čuma, M., Wilson, G. A., and Zhdanov, M. S. (2012). *"Large-scale3D inversion of potential field data"*. Geophysical Prospecting, 60: 1186-1199.

[14] Čuma, M., and Zhdanov, M. S. (2014). *"Massively parallel regularized 3D inversion of potential fields on CPUs and GPUs"*. Computers and Geosciences, 62: 80-87.

[15] Rezaie, M. (2019). *"3D non-smooth inversion of gravity data by zero order minimum entropy stabilizing functional"*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 294: 106275.

[16] Xiang, Y., Yu, P., Zhang, L., Feng, S., and Utada, H. (2017). *"Regularized magnetotelluric inversion based on a minimum support gradient stabilizing functional"*. Earth, Planets and Space, 69(1): 158.

[17] Hestenes ,M .R ,.and Stiefel ,E .(1952) .*"Methods of conjugate gradients for solving linear systems"*. Research of the National Bureau of Standards, 49(6): 409-436.

[18] Zhdanov, M. S. (2015). *"Inverse theory and applications in geophysics"*. Elsevier Science, pp. 730.

[19] Rezaie, M., Moradzadeh, A., Kalate, A. N., Aghajani, H., Kahoo, A. R., and Moazam, S. (2017). *"3D modelling of Trompsburg Complex (in South Africa) using 3D focusing inversion of gravity data"*. Journal of African Earth Sciences, 130: 1-7.

[20] Sun, Y., Meng, Z., and Li, F. (2018). *"Large Airborne Full Tensor Gradient Data Inversion Based on a Non-Monotone Gradient Method"*. Pure and Applied Geophysics, 175(3): 1065-1084.

[21] Wei, Z., Yao, S., and Liu, L. (2006). *"The convergence properties of some new conjugate gradient methods"*. Applied Mathematics and computation, 183(2): 1341-1350.

[22] Mtagulwa, P., and Kaelo, P. (2019). *"A convergent modified HS-DY hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization problems"*. Journal of Information and Optimization Sciences, 40(1): 97-113.

[23] Polak, E., and Ribiere, G. (1969). *"Note on the convergence of conjugate direction methods"*. ESAIM: Mathematical Modeling and Numerical Analysis, 3(R1): 35-43. (In French).

[24] Fletcher, R., and Reeves, C. M. (1964). *"Function minimization by conjugate gradients"*. the Computer Journal, 7(2): 149-154.

[۲۵] معظم، س.، آقاجانی، ح.، نجاتی، ع.؛ ۱۳۹۹؛ "**بهبود محاسبه ماتریس هسته در مدل‌سازی وارون داده‌های گرانی به روش ترکیبی**". مجله پژوهش‌های ژئوفیزیک کاربردی، آماده انتشار.

[26] Hajar, N., Shapiee, N., Abidin, Z. Z., Khadijah, W., Rivaie, M., and Mamat, M. (2017). "A new modified conjugate gradient coefficient for solving system of linear equations". In Journal of Physics: Conference Series, 890(1): 012108. IOP Publishing.

[27] Salleh, Z., and Alhawarat, A. (2016). *"An efficient modification of the Hestenes-Stiefel nonlinear conjugate gradient method with restart property"*. Journal of Inequalities and Applications, 110(2016). DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-016-1049-5.

[28] Abdullahi, I., and Ahmad, R. (2017). *"Global convergence analysis of a new hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization problems"*. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, 2(13): 40-48.

[29] Abdullahi, I., and Ahmad, R. (2016). *"Global convergence analysis of a nonlinear conjugate gradient method for unconstrained optimization problems"*. Indian Journal of Science and Technology, 9: 1-9.

[30] Abdullahi, I., and Ahmad, R. (2015). *"Convergence analysis of a new conjugate gradient method for unconstrained optimization"*. Applied Mathematical Sciences, 9: 6969-6984.

[31] Hu, Y. F., and Storey, C. (1991). *"Global convergence result for conjugate gradient methods"*. Journal of Optimization Theory and Applications (JOTA), 71(2): 399-405.

[32] Hager, W. W., and Zhang, H. (2006). *"A survey of nonlinear conjugate gradient methods"*. Pacific Journal of Optimization, 2(1): 35-58.

[33] Zhang, L., Koyama, T., Utada, H., Yu, P., and Wang, J. (2012). *"A regularized three-dimensional magnetotelluric inversion with a minimum gradient support constraint"*. Geophysical Journal International, 189(1): 296-316.

[۳۴] قلعه نویی، م. ح.؛ ۱۳۹۷؛ "**وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل: روشی برای مدل‌سازی شکل هندسی توده‌ها و ساختار زمین‌شناسی**". رساله دکتری، دانشگاه یزد.