

## برآورد احتمالاتی توزیع بار در واحدهای فرآوری مواد معدنی با روش زنجیره مارکف

مهدی نوروزی<sup>۱\*</sup>، سید محمد اسماعیل جلالی<sup>۲</sup>، اصغر عزیزی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود  
۲- دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

(دریافت ۱۳۹۷/۱۲/۱۰، پذیرش ۱۳۹۸/۱۱/۱۲)

### چکیده

در روش‌های مرسوم موازنه جرم، برای تعیین عیار فلز، درصد جامد و توزیع دانه‌بندی نمونه‌برداری در مسیرها (شاخه‌ها) انجام می‌شود و در نهایت خطاهای مربوط به آنها سرشکن می‌شود. در این روش‌ها، برای هر واحد فرآوری (تجهیزات کارخانه)، در خصوص مقدار بار و عیار یا محتوای فلز اطلاعات لحظه‌ای وجود ندارد. در این مقاله با بهره‌گیری از نظریه فرآیندهای تصادفی، مقادیر کمی و کیفی بار ورودی به هر یک از واحدهای عملیاتی در مسیر فرآوری به شکل احتمالات در نظر گرفته و توزیع بار در واحدهای مذکور برآورد شده است. به این منظور، ابتدا کارخانه فرآوری به صورت یک گراف جهت‌دار و موزون مدل‌سازی شده است. در این گراف، هر گره بیانگر یک واحد عملیاتی و هر یال، نشان‌دهنده مسیر واقع بین دو واحد است. وزن هر یال معرف وزن مواد عبوری در مسیر از گره‌ای به گره دیگر بوده و در یک بازه زمانی مشخص به‌عنوان یک متغیر تصادفی منظور شده است. پس از مدل‌سازی فرآیند، مدل گرافی به‌دست آمده که در برگزیده شاخص‌های تصادفی است با استفاده از نظریه "زنجیره‌های مارکف" تحلیل شده است. با روش ارایه شده در این مقاله نه تنها توزیع بار، بلکه احتمال حضور هر ذره یا کانی، در هر یک از واحدهای عملیاتی کارخانه فرآوری نیز قابل پیش‌بینی است. همچنین در صورت توقف کارخانه، می‌توان تناژ موجود در هر یک از واحدها را تخمین زد و اقدامات لازم برای تخلیه آنها را فراهم کرد. در این تحقیق، خط فرآوری سنگ آهن چادرملو با روش بالا، مدل‌سازی و نتایج حاصل تحلیل و سپس با استفاده از شاخص‌های احتمالات گزارش شده است.

### کلمات کلیدی

فرآوری مواد معدنی، توزیع بار، مدل‌سازی، فرآیند تصادفی، زنجیره‌های مارکف.

## ۱- مقدمه

یافته است.

مرور منابع موجود نشان می‌دهد که نقطه آغاز استفاده گسترده از مدل‌های آماری در فعالیت‌های معدنی در اکتشاف معادن به ویژه در زمینه برآوردهای کمی و کیفی ذخایر معدنی بوده که با ورود به عرصه مطالعات زیست محیطی ادامه یافته است. در بخش استخراج معدن نیز کاربرد روش‌های مدل‌سازی آماری بیشتر در زمینه برآورد ماشین‌های معدنی در فعالیت‌های مربوط به حمل و نقل مواد معدنی تمرکز داشته است.

در فعالیت‌های کانه‌آرایی و فرآوری مواد معدنی نیز باید گفت بسیاری از ویژگی‌ها از جمله مقدار و عیار بار ورودی به هر یک از واحدهای فرآوری، ماهیت احتمالی دارند و باید با استفاده از روش‌های احتمالات و فرآیندهای تصادفی تحلیل شوند.

در بین روش‌های تصادفی، "زنجیرهای مارکف"<sup>۴</sup> از دو دیدگاه اهمیت دارند و مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند است: نخست برخورداری از نظریه و پشتوانه غنی ریاضی و دوم، توانایی مدل‌سازی و تحلیل بسیاری از مسایل طبیعی و کاربردی [۲].

تاکنون کاربردهای زیادی از زنجیرهای مارکف برای مدل‌سازی و بهینه‌سازی در حوزه‌های مختلف به‌ویژه مهندسی معدن و زمین‌شناسی گزارش شده که نشان از عملکرد و توانایی تئوری این روش در شبیه‌سازی سیستم‌های مذکور است [۱۷-۳]. برای مثال "میزانو و همکاران" کاربرد زنجیره مارکف چندبعدی را به منظور مدل‌سازی سینتیکی<sup>۵</sup> خردایش مورد بررسی قرار دادند و مدل دو بعدی آن را مارکف برای توصیف انتقال ذرات در امتداد مختصات اصلی در یک آسیا و انتقال ذرات از یک بخش به بخش دیگر پیشنهاد کردند [۴].

"جلالی و همکاران" [۱۰، ۸، ۶] مدل‌سازی با استفاده از زنجیرهای مارکف را برای بهینه‌سازی محدوده معدن‌کاری به روش روباز و برآورد تعداد کارگاه‌های ذخیره در روش زیرزمینی به کار بردند. نتایج یکی از این تحقیق‌ها نشان داد که با استفاده از این روش می‌توان بخشی از محدوده معدن را که احتمال دستیابی به سود حداکثری استخراج در آن بیشتر از سایر نواحی معدن است، تعیین کرد.

"محمدی و همکاران" به ارزیابی و تحلیل قابلیت اطمینان دستگاه‌های حفاری دورانی در معدن سنگ آهن شماره ۱ گل‌گهر سیرجان با استفاده از مدل‌سازی زنجیره مارکف پرداختند و گزارش دادند که این روش یک ابزار قدرتمند

در روش‌های مرسوم، توزیع بار در خطوط فرآوری مواد معدنی بر پایه موازنه جرم و عیار بارهای ورودی و خروجی در هر واحد عملیاتی محاسبه می‌شود. محاسبات موازنه جرم در مدارهای فرآوری، یک گام اساسی در ارزیابی و کنترل عملیات است. همان‌طور که بیان شد این محاسبات بر پایه قانون بقای جرم استوار هستند و عمدتاً به محاسبه نرخ‌های جریان مواد در مدار می‌پردازند. به‌منظور موازنه جرم لازم است تعداد حداقلی از جریان‌ها (شاخه‌ها) برای اندازه‌گیری یا نمونه‌گیری مشخص شوند (محل اندازه‌گیری) و سپس با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده، محاسبات موازنه و در صورت نیاز تعدیل برخی مقادیر اندازه‌گیری شده، انجام شود [۱].

در مدارهای فرآوری، به‌طور معمول اطلاعاتی همچون عیار فلز، درصد جامد و توزیع دانه‌بندی در مسیرها جمع‌آوری می‌شوند. سپس با استفاده از این داده‌ها و اطلاعات فزاکسیون جرم<sup>۱</sup> در مسیرها و بهره‌گیری از ماتریس "لاگرانژ"، محاسبات موازنه جرم انجام و سپس خطاهای مربوط به مقادیر اندازه‌گیری شده عیار فلز، درصد جامد و توزیع دانه‌بندی سرشکن می‌شود. در اینجا توجه به سه نکته ضروری است: نخست اینکه در محاسبات موازنه جرم و فرآوری مواد معدنی، نمونه‌برداری و عیارسنجی از مسیرها (شاخه‌ها) انجام می‌شود و امکان نمونه‌گیری از گره‌ها (مانند تجهیزات خردایش و غیره در واحد فرآوری) وجود ندارد. بنابراین نمی‌توان هیچ‌گونه پیش‌بینی در مورد عیار یا محتوای فلز در هر واحد از کارخانه فرآوری ارائه کرد.

نکته دوم، در محاسبات موازنه جرم، زمان ماند یا میزان توقف زمانی مواد در هر واحد از مسیر فرآوری در نظر گرفته نمی‌شود؛ در حالی‌که در بسیاری از واحدهای عملیاتی از جمله واحدهای سنگ‌شکن و آسیا، سلول‌های فلوتاسیون و انواع سرندها، زمان ماند مواد اهمیت دارد. از سوی دیگر در موازنه جرم، پیش‌بینی لحظه‌ای توزین بار در هر بخش از واحد فرآوری غیرممکن است.

سومین مساله نیز غیرقطعی بودن کمیت و کیفیت بار ورودی به یک واحد فرآوری و توزیع آن است. از این رو می‌توان آنها را به صورت یک شاخص احتمالات در نظر گرفت.

در چند سال اخیر استفاده از فرآیندهای تصادفی<sup>۲</sup> برای مدل‌سازی پدیده‌هایی که ماهیت تصادفی و احتمالات<sup>۳</sup> دارند در بخش‌های مختلف فعالیت‌های معدنی به سرعت گسترش

در این تحقیق با مطالعه موردی، روش توسعه داده شده بر روی مسیر فرآوری کارخانه سنگ آهن چادرملو پیاده‌سازی می‌شود.

## ۲- مبانی و مفاهیم زنجیره‌های مارکف

از آنجا که روش تشریح‌شده در این مقاله بر استفاده از الگوهای احتمالات و فرآیندهای تصادفی به ویژه مفاهیم نظریه زنجیره‌های مارکف استوار است، در آغاز بعضی از ابزارهای ضروری برای درک چگونگی مدل‌سازی و روش تحلیل مدل، مرور و تعریف دقیق آنها ارایه می‌شود.

### ۲-۱- فرآیندهای تصادفی

یک فرآیند تصادفی، مجموعه‌ای از رخدادها است که هر یک دارای یک احتمال وقوع معین هستند. به بیان ریاضی، مجموعه  $\{N_i\}$  که در آن  $i$  متغیری از میان اعضای مجموعه  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$  است، مجموعه متغیرهای تصادفی نامیده می‌شود. فرآیندهای تصادفی توسط فضای حالت خود که در واقع محدوده مقادیر محتمل برای متغیرهای تصادفی  $N_i$  به‌شمار می‌روند، مشخص می‌شوند [۱۸].

در این مقاله ابتدا هر بخش از مسیر فرآیند فرآوری به عنوان یک فرآیند تصادفی تعریف و سپس برآورد توزیع بار در مسیرهای مختلف فرآیند با استفاده از زنجیره‌های مارکف بررسی شده است.

### ۲-۲- بردارها و ماتریس‌های تصادفی

اگر  $u$  یک بردار با  $n$  مولفه و  $A$  یک ماتریس مربع  $n \times n$  باشد، آن‌گاه حاصل ضرب  $u \times A$  نیز یک ماتریس  $1 \times n$  است. اگر ضرب  $u \neq 0$  در  $A$  از طرف چپ،  $u$  را تغییر ندهد، در این حالت  $u$  بردار ثابت<sup>۱</sup> یا (نقطه ثابت)  $A$  نامیده می‌شود [۱۹]. اگر مولفه‌های بردار  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  نامنفی و مجموع آنها برابر ۱ باشد،  $u$  بردار احتمال<sup>۲</sup> و ماتریس مربع  $P = (p_{ij})$  که تمام سطرهای آن بردار احتمال باشند، ماتریس تصادفی<sup>۳</sup> نامیده می‌شود.

ماتریس تصادفی  $P$  در صورتی که درایه‌های هر توانی از آن مثل  $P^m$  مثبت باشد، ماتریس تصادفی منظم<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. اگر  $P$  ماتریس تصادفی منظم در نظر گرفته شود، آنگاه  $P$  دارای بردار احتمال ثابت منفرد<sup>۵</sup>  $t$  است که همه مولفه‌های آن مثبت هستند و رشته  $P, P^2, P^3, \dots$  از توان‌های  $P$  به

محاسباتی در این زمینه است و با احتمال  $95/42$  درصد معادل  $347$  روز، حداقل دو دستگاه برای عملیات حفاری آماده به کار و در دسترس هستند [۱۴].

"یارموچ و همکاران" ارزیابی موقعیت سیستم سنگ‌شکن را در یک معدن روباز با استفاده از این روش مورد مطالعه قرار دادند و گزارش کردند که این مدل می‌تواند با یک ضریب همبستگی بالا محل نصب مناسب را با توجه به احتمال خرابی تجهیزات، حداقل سرمایه و هزینه‌های عملیاتی پیشنهاد کند [۱۵].

"قوش و همکاران" در مطالعه مروری بر روی مدل‌های زنجیره مارکف بیان کردند که امروزه مدل‌سازی با بهره‌گیری از این روش در شاخه‌های مختلف علوم مورد استفاده قرار گرفته و کاربرد فراوانی در حوزه علوم زمین پیدا کرده است [۱۶]. ولی در زمینه مهندسی معدن به‌ویژه فرآوری مواد معدنی مطالعه و تحقیق در به‌کارگیری روش مذکور بسیار کم است.

نکته مهم دیگری که در این مقاله به آن توجه شده، آن است که یکی از موارد اساسی در بررسی شرایط عملیاتی مدارهای کارخانه‌جات فرآوری مواد معدنی، تحلیل اثر توزیع خوراک ورودی (میزان بار ثابت و بار در گردش) در هر واحد است که می‌تواند نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد کارخانه داشته باشد. بنابراین هدف این مقاله، ارایه یک روش برای تخمین میزان بار ثابت در هر یک از واحدهای کارخانه‌های فرآوری به شیوه‌ای متأثر از احتمالات و وابستگی زمانی است. در پژوهش حاضر با بهره‌گیری از تئوری زنجیره‌های مارکف، مقادیر کمی و کیفی بارهای ورودی به هر یک از واحدهای عملیاتی، به عنوان مقادیر احتمالاتی و وابسته به مسیر، تعیین می‌شوند و به این دلیل، دیدگاه جدیدی برای برآورد توزیع بار در خطوط فرآوری مطرح شده است. همچنین با کمک شیوه مطرح شده در این مقاله نه تنها توزیع بار بلکه احتمال حضور هر ذره یا کانی که مقادیر آن در بار ورودی به مسیرهای فرآوری مشخص است در هر یک از واحدهای عملیاتی قابل پیش‌بینی است.

علاوه بر این با استفاده از روش ارایه شده در این مقاله، اگر کارخانه به هر دلیلی متوقف شد و تجهیزات آن نیاز به تعمیر و تعویض داشتند، می‌توان پیش‌بینی کرد که در هر واحدی چه‌قدر تناژ وجود دارد؛ به عنوان مثال، در صورت شکسته شدن لاینر آسیای گلوله‌ای، می‌توان تخمین زد چند تن ماده معدنی باید از آسیا خارج شود تا بتوان لاینر را تعویض کرد.

ماتریس  $T$  که هر کدام از سطرهاى آن یک بردار ثابت  $t$  است، میل می کند [۱۹].

### ۲-۳- زنجیره‌های مارکف

فرآیند زنجیر مارکف  $\{N_i\}$  یک فرآیند تصادفی با این ویژگی است که مقادیر داده شده  $N_i$  و  $N_h$  برای  $h > i$  تحت تاثیر مقادیر  $N_j$  برای  $j < i$  قرار نمی‌گیرد. به عبارت دیگر، احتمال انتقال از یک حالت به حالت دیگر تنها به آخرین اطلاعات گذشته که در مورد فرآیند وجود دارد، بستگی دارد [۲۰].

با توجه به تعاریف فوق، زنجیره رخدادهایی که نتایج آنها نظیر  $N_1, N_2, N_3, \dots$  دو ویژگی زیر را برآورده می‌کنند، زنجیر مارکف نامیده می‌شوند:

الف) نتیجه هر رخداد به یک مجموعه متناهی از نتایج مثل  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  به نام "فضای حالت دستگاه" تعلق داشته باشد. به عبارتی اگر نتیجه  $n$ امین آزمایش  $s_i$  باشد، گفته می‌شود که سیستم در زمان  $n$  یا در  $n$ امین مرحله در حالت  $s_i$  قرار دارد.

ب) نتیجه هر رخداد فقط به نتیجه رخداد بلافاصله ماقبل آن (و نه هیچکدام از رخدادهاى قبلی) وابسته باشد. در واقع، برای هر زوج از حالت‌ها، نظیر  $(s_i, s_j)$ ، احتمال معینی مثل  $p_{ij}$  وجود دارد به طوری که  $s_j$  بلافاصله بعد از  $s_i$  رخ دهد. اعداد  $p_{ij}$  که احتمال انتقال دستگاه از حالت  $s_i$  به  $s_j$  را نشان می‌دهند، "احتمال انتقال" خوانده می‌شوند و با یک آرایش ماتریسی به نام ماتریس انتقال، به شکل زیر نمایش داده می‌شود.

به این ترتیب به هر حالت  $s_i$ ، سطر  $i$ ام ماتریس انتقال  $P$ ، یعنی  $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im})$ ، متناظر می‌شود. اگر دستگاه در حالت  $s_i$  باشد، آن‌گاه این سطر برداری، همه نتایج محتمل در آزمایش بعدی را ارایه خواهد کرد و ابه این دلیل یک بردار احتمال به حساب می‌آید [۱۸].

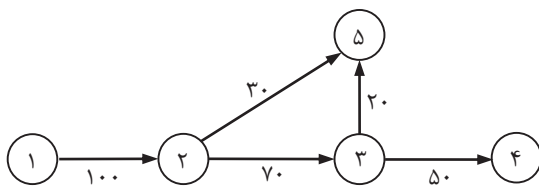
درایه  $p_{ij}$  در ماتریس انتقال  $P$  از زنجیر مارکف، به معنی احتمال تغییر دستگاه، از حالت  $s_i$  به  $s_j$  دقیقاً بعد از یک مرحله تغییر است. اگر هدف یافتن احتمال تغییر دستگاه از حالت  $s_i$  به  $s_j$  بعد از دقیقاً  $n$  مرحله باشد، باید ماتریس  $P^{(n)}$  یا ماتریس انتقال  $n$  مرحله‌ای ایجاد شود. در فرآیند زنجیر مارکف، با فرض این که  $P$  ماتریس انتقال تک مرحله‌ای است، ماتریس انتقال  $n$  مرحله‌ای برابر با توان  $n$ ام  $P$  خواهد بود.

با در نظر گرفتن ماتریس انتقال  $P$  برای زنجیر مارکف، احتمال این که با گذشت زمان طولانی، حالت  $s_j$  رخ دهد تقریباً با مولفه  $t_j$  از بردار احتمال ثابت منفرد  $t$  در ماتریس  $P$  برابر است. در این صورت ملاحظه می‌شود که اثر حالت اولیه یا توزیع احتمال اولیه فرآیند به تدریج با افزایش تعداد مراحل فرآیند، از بین می‌رود. به این حالت توزیع ماندگار<sup>۱۲</sup> "زنجیر مارکف" گفته می‌شود [۱۸].

### ۳- مدل‌سازی مسیر فرآوری

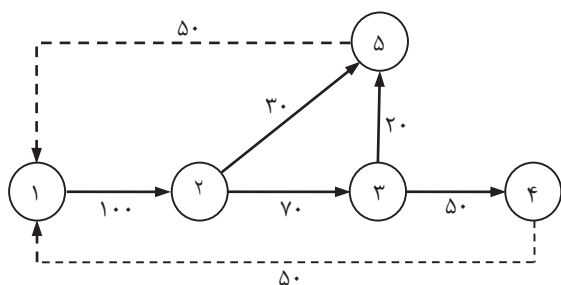
امروزه شبیه‌سازی، ابزار بسیار مناسبی برای بررسی مسیر تولید در یک کارخانه است [۲۱]. در یک واحد فرآوری اجزای کارخانه و ارتباط بین آنها را می‌توان با استفاده از یک گراف جهت‌دار<sup>۱۳</sup> و موزون<sup>۱۴</sup> نشان داد. همان‌طور که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود، هر گراف از یک سری گره و تعدادی یال که نشان‌دهنده ارتباط بین گره‌ها است، تشکیل می‌شود. هر یال، یک جهت مشخص و یک مقدار مشخص که نشان‌دهنده وزن بین دو گره است را نیز با خود به همراه دارد. مسیر به مجموعه‌ای از گره‌ها در هر گراف در شرایطی که از هر گره به گره بعدی، یک یال وجود داشته باشد، گفته می‌شود [۱۹]. بنابراین، مجموعه گره‌های  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  در شکل ۱، نشان‌دهنده یک مسیر هستند.

در این گراف هر گره، نشان‌دهنده یک واحد عملیاتی از کارخانه فرآوری و هر یال، مشخص‌کننده مسیر فرآوری بین دو گره مفروض است.



شکل ۱: شبیه‌سازی یک کارخانه فرآوری با یک گراف جهت‌دار موزون

در شکل ۱ وزن مواد عبوری از هر یال بر حسب تن بر ساعت درج شده است. طبیعی است که در این شرایط با توجه به وزن یال‌ها، بر اساس روش‌های مرسوم، می‌توان مقدار مواد ورودی و خروجی به هر گره که در واقع یک واحد عملیاتی از مسیر فرآوری کارخانه است را محاسبه کرد. همچنین با توجه



شکل ۲: گراف اصلاح شده شکل ۱

ماتریس انتقال  $P$  متناظر با گراف مذکور در زیر مشاهده می‌شود (رابطه ۱).

$$P = a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

با توجه به معادله ۲، مقادیر بردار  $t$  که نشان‌دهنده احتمال پایدارماندن دستگاه در هر یک از مراحل است، به ترتیب زیر قابل محاسبه است (رابطه ۳).

$$t.P = t \quad (2)$$

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \quad (3)$$

که در آن  $x_i$  مقادیر احتمال پایداری دستگاه در هر مرحله یا به عبارت دیگر نشان‌دهنده درصد بار موجود در هر مرحله از مسیر فرآوری است.

جواب‌های معادله فوق را با توجه به اینکه بردار  $t$  یک بردار احتمال است و مجموع درایه‌های آن برابر با یک است، می‌توان محاسبه کرد. براین اساس درایه‌های این بردار عبارتند از:

$$x_1=0.27, x_2=0.27, x_3=0.189, x_4=0.135, x_5=0.135$$

با ضرب کردن مقادیر فوق در میزان خوراک کارخانه فرآوری، می‌توان توزیع بار در هر یک از اجزای کارخانه را بر حسب ۱۰۰ واحد از بار ورودی محاسبه کرد. در ادامه مقادیر

به جهت یال‌ها، می‌توان محل‌های ورود خوراک به کارخانه و دپوی مواد باطله و کنسانتره را به عنوان خروجی‌های گراف مشخص کرد. در این شکل، گره ۱، مشخص‌کننده محل ورود خوراک به کارخانه و گره‌های ۴ و ۵ به ترتیب محل‌های خروج باطله و کنسانتره در خط فرآوری است.

با توجه به موارد ذکر شده، مشخص می‌شود که هر گره در یک گراف شبیه‌سازی شده از یک کارخانه فرآوری، می‌تواند بیان‌گر یک فضای حالت از یک دستگاه مارکفی باشد. در این شرایط، وزن هر یال را نیز می‌توان به عنوان وزن مواد عبوری در یک مسیر از یک گره به گره دیگر شبیه‌سازی کرد و هر واحد از زمان را بر حسب ساعت به عنوان مجموعه  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$  در یک فرآیند تصادفی در نظر گرفت. بنابراین با گذشت زمان و به ازای هر یک از اعضای مجموعه  $I$ ، یک متغیر تصادفی  $N_i$  ایجاد می‌شود که مقدار آن را می‌توان متناظر با درصد مواد عبوری از هر گره بر روی هر یال فرض کرد.

در هر واحد زمانی، با پیشروی دستگاه مارکفی، یک توزیع جدید از بار ورودی بر روی هر یک از گره‌ها به وجود می‌آید. با گذشت زمانی طولانی، دستگاه به حالت توزیع ماندگار می‌رسد و توزیع بار در هر گره از گراف یا به عبارت دیگر در هر یک از واحدهای عملیاتی کارخانه فرآوری مشخص می‌شود.

برای محاسبه توزیع ماندگار زنجیر مارکف بر روی یک گراف مدل‌سازی‌شده، باید توزیع  $n$  مرحله‌ای زنجیر مارکف که در آن  $n$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کند را محاسبه کرد. بنابراین اگر بخواهیم مدل با یک مقدار ورودی مشخص، در بی‌نهایت مرحله اجرا شود، لازم است با توجه به اصل موازنه جرم، بارهای خروجی مدل را با هم ترکیب و به عنوان بار ورودی وارد گراف مدل‌سازی‌شده کنیم. شکل ۲، اصلاح شده گراف شکل ۱ را بر اساس اصل موازنه جرم و به منظور دستیابی به توزیع ماندگار در زنجیرهای مارکف نشان می‌دهد.

لازم به ذکر است چون داده‌های توزیع پایدار (ماندار) بار در هر یک از گره‌ها (تجهیزات فرآوری) توسط فزاکسیون جرمی هر یک از شاخه‌ها به دست آمده و مقادیر دقیق و بدون خطا هستند، داده‌های به دست آمده از روش مارکوف نیز دقیق بوده‌اند و نیاز به موازنه جرم ندارند.

اکنون می‌توان ماتریس انتقال متناظر با گراف شکل ۲ را که در آن هر درایه، نشان‌دهنده احتمال انتقال دستگاه از یک حالت به حالت دیگر است را تشکیل داد.

۴- بررسی کمی توزیع بار در مسیر فرآوری سنگ آهن چادرملو

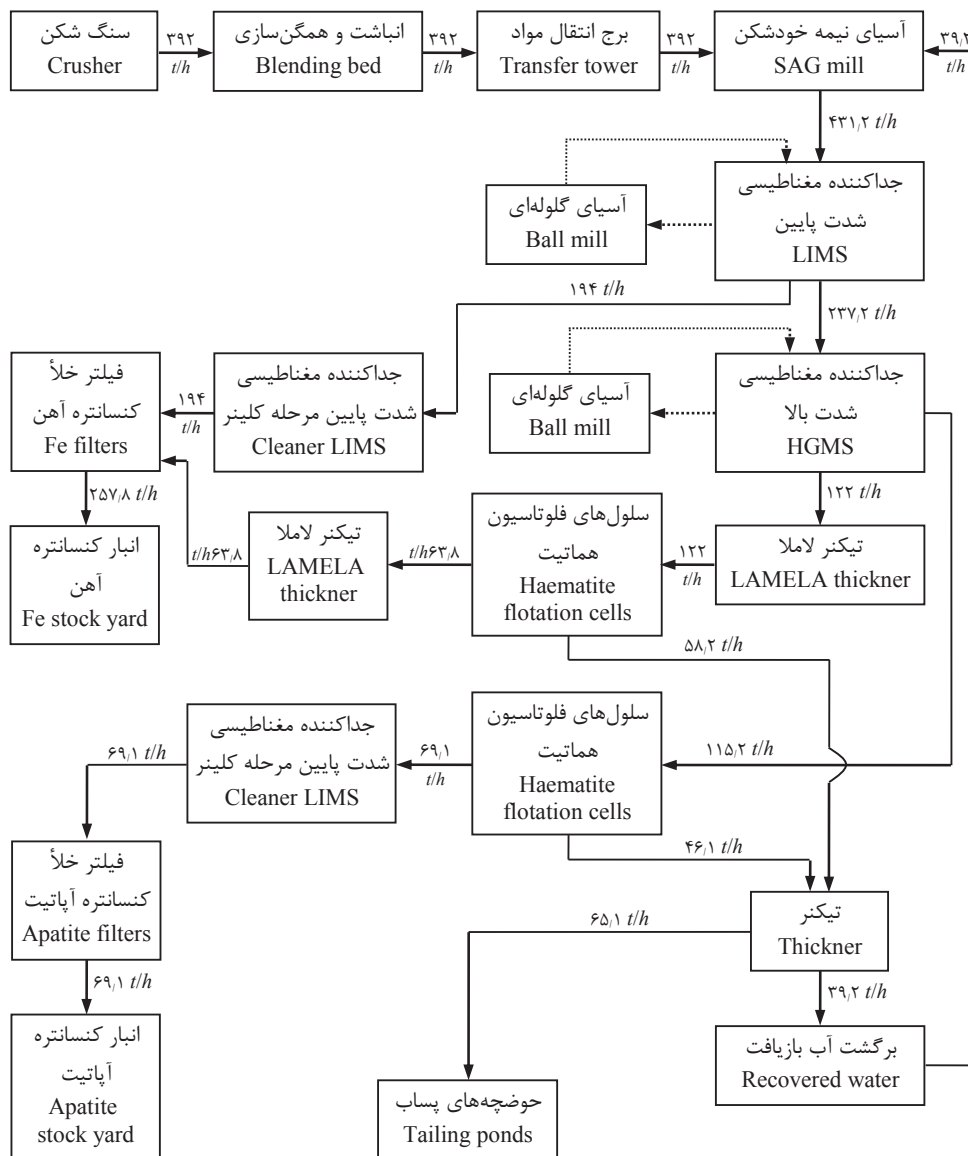
شکل ۳، روندنمای عملیات فرآوری سنگ آهن معدن چادرملو با ظرفیت فرآوری ۳۹۲ تن بر ساعت را نشان می‌دهد [۲۲].

در این شکل، وزن مواد مربوط به هر مرحله نیز درج شده است. مواد معدنی استخراجی که به واحد خردایش منتقل می‌شوند، توسط یک دستگاه سنگ‌شکن ژیراتوری به ابعاد کمتر از ۳۰ سانتی‌متر شکسته و مواد خردشده پس از عبور از

بار در هر یک از اجزای کارخانه فرآوری آورده شده است.

$$w_1=27, w_2=27, w_3=18.9, w_4=13.5, w_5=13.5$$

با کاربرد این روش همچنین می‌توان احتمال حضور یک کانی که مقدار آن در بار ورودی مشخص است را در هر مرحله از فرآیند برآورد کرد. طبیعی است در این حالت‌ها باید احتمال انتقال تک‌مرحله‌ای کانی از یک واحد به واحد فرآوری دیگر مشخص باشد. این احتمال را می‌توان در هر مرحله با انجام مطالعات آزمایشگاهی، نیمه‌صنعتی و یا حتی در زمان بهره‌برداری از کارخانه فرآوری با نمونه‌گیری‌های مناسب محاسبه کرد.



شکل ۳: مسیر کارخانه فرآوری سنگ آهن چادرملو [۲۲]

سنگ شکن، توسط دستگاه انباشت کننده<sup>۱۵</sup> به دو انبار موازی، هدایت می‌شوند.

مواد پس از همگن‌سازی به روش برداشت پنجره‌ای<sup>۱۶</sup> توسط دستگاه برداشت کننده<sup>۱۷</sup> و به وسیله مجموعه‌ای از نوار نقاله‌ها به سیلوهای ۱۰۰۰ تنی که در ابتدای هر خط تولید کارخانه قرار دارد، منتقل می‌شوند. مواد وارد شده به داخل این سیلوه‌ها، توسط چهار فیدر لرزان که در زیر سیلو قرار دارند بر روی نوار نقاله‌ای که خوراک اصلی آسیای نیمه خودشکن<sup>۱۸</sup> را تامین می‌کند، ریخته می‌شوند.

مواد دانه‌ریز حاصل از آسیای نیمه خودشکن به دستگاه جداکننده مغناطیسی شدت پایین<sup>۱۹</sup> هدایت می‌شوند. این دستگاه دارای سه استوانه است و مواد پس از ریخته شدن بر روی آن، تحت تاثیر میدان مغناطیسی به دو محصول تبدیل می‌شوند.

محصول اول که بیشتر منیته است، برای آخرین مرحله فسفرزدایی، وارد مرحله جداکننده مغناطیسی شدت پایین تمیزکننده<sup>۲۰</sup> می‌شود. این جداکننده‌ها، سه ردیف سه تایی (۹ عدد) هستند و به صورت تر کار می‌کنند. محصول این مرحله وارد تانک کنسانتره منیته می‌شود.

محصول دوم جداکننده مغناطیسی شدت پایین، وارد سیستم جداکننده شدت بالا<sup>۲۱</sup> می‌شود. این دستگاه با شدت میدان ۴۵۰۰ تا ۵۰۰۰ گوس<sup>۲۲</sup> کار می‌کند. خروجی این دستگاه دارای دو محصول مجزا است:

الف) جریان بالاسری یا هماتیت

ب) جریان زیری یا آپاتیت

جریان بالاسری یا جریان هماتیته توسط یک مکنده<sup>۲۳</sup> جمع‌آوری و به وسیله پمپی وارد سیکلون می‌شود. جریان مواد دانه‌ریز یا سرریز سیکلون نیز وارد تیکنری از نوع لاملا<sup>۲۴</sup> صفحه‌ای می‌شود. مواد پس از جمع شدن در یک تانک، توسط یک پمپ به سمت سلول فلوتاسیون فسفرزدایی هماتیت هدایت می‌شوند. کنسانتره این مرحله برای افزایش غلظت جامد، وارد تیکنر لاملا می‌شود. ته‌ریز تیکنر نیز از راه تانک واسطه‌ای که مجهز به همزن است، به تانک کنسانتره منیته منتقل می‌شود. مواد موجود در این تانک برای آگیری، وارد مرحله فیلتراسیون می‌شوند. عمل فیلتراسیون توسط چهار فیلتر صورت می‌گیرد. کنسانتره تولیدی حاصل از فیلتراسیون، مخلوطی از هماتیت و منیته است که با رطوبت حداکثر ۱۰٪ بر روی نوار نقاله‌ای ریخته و سپس به سیلوهای کنسانتره

منتقل می‌شود.

جریان زیر یا جریان آپاتیت، جریان ته‌ریز جداکننده شدت بالا است که پس از جمع شدن در یک تانک، توسط پمپ به سیستم فلوتاسیون آپاتیت منتقل می‌شود. کنسانتره حاصل از مرحله فلوتاسیون به تیکنر هدایت و پس از آگیری، به غلظت معادل ۷۰٪ جامد می‌رسد. ته‌ریز تیکنر نیز وارد تانک‌هایی مجهز به همزن می‌شود. این تانک‌ها به‌عنوان نگه‌دارنده و خوراک‌دهنده فیلتر خشک‌کن آپاتیت عمل می‌کنند. در این مرحله، مواد با رطوبت حداکثر ۱۰٪ به وسیله یک نوار نقاله به سمت سیلوی ذخیره کنسانتره آپاتیت منتقل می‌شوند.

محصول‌های نامطلوب سلول‌های فلوتاسیون هماتیت و آپاتیت هم وارد تیکنر می‌شوند. محصول تیکنر به تانک دیگری منتقل می‌شود که پس از بازیافت آب، محصول به‌دست آمده به مدار فرآوری بازمی‌گردد. در انتها محصول باطله نیز توسط یک پمپ به سد باطله منتقل می‌شود [۲۲].

با توجه به روندنمای شکل ۳، گراف نشان داده شده در شکل ۴، ترسیم شده است. در این گراف، هر گره نشان‌دهنده یک مرحله از کارخانه و هر یال به همراه وزن آن، نشان‌دهنده جهت مسیر عبور بار و احتمال عبور بار از آن مسیر است. با در نظر گرفتن روندنما و گراف متناظر با آن، می‌توان احتمال انتقال بار از هر جزء از خط فرآوری به اجزای دیگر را بر اساس موازنه جرم محاسبه کرد. برای مثال ۱۰۰ درصد بار ورودی از مرحله ۶ به مرحله ۷ انتقال می‌یابد. بنابراین در ماتریس انتقال در درایه مربوطه، رقم یک درج می‌شود. به صورت مشابه، از میزان باری که به مرحله ۵ رسیده است، ۵۱٫۴۳ درصد به مرحله ۶ و ۴۸٫۵۷ درصد به مرحله ۹ منتقل می‌شود. با بررسی هریک از مراحل فرآوری در گراف شکل ۴، می‌توان ماتریس انتقال متناظر با آن را به صورت ماتریس شکل ۵ تعریف کرد. اکنون می‌توان توزیع ماندار زنجیر مارکف یعنی بردار ثابت ماتریس انتقال که هر یک از درایه‌های آن درصد حضور بار یا به عبارت دیگر توزیع بار در هر مرحله از مسیر فرآوری را نشان می‌دهد، محاسبه کرد (رابطه ۴):

$$t \times w = t \quad (4)$$

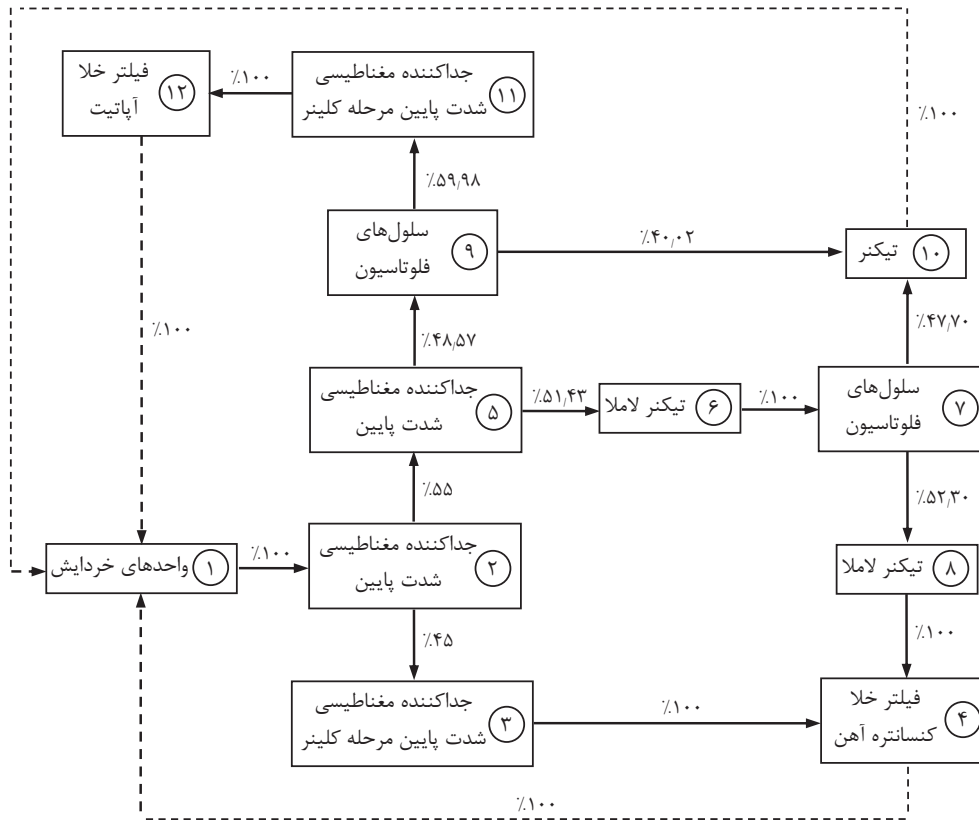
$$t = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}]$$

از طرفی با توجه به اینکه بردار  $t$  یک بردار احتمال است (رابطه ۵):

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (5)$$

$$t = \begin{bmatrix} 0.1945 & 0.1945 & 0.0875 & 0.1163 & 0.1069 & 0.0550 \\ 0.0550 & 0.0287 & 0.0519 & 0.0470 & 0.0311 & 0.0311 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات بالا، مقادیر بردار  $t$  که نشان‌دهنده احتمال پایدار ماندن دستگاه در هر یک از مراحل است، محاسبه می‌شود:



شکل ۴: شبیه‌سازی روندنمای شکل ۳ با استفاده از گراف جهت‌دار موزون

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0.55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5143 & 0 & 0 & 0.4857 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5230 & 0 & 0.477 & 0 \\ a_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4002 & 0.5998 \\ a_{10} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل ۵: ماتریس انتقال متناظر با گراف شکل ۴



و در صورت توقف کارخانه و لزوم تعمیر و تعویض تجهیزات، می‌توان پیش‌بینی کرد که در هر واحد چقدر تناژ وجود دارد و به چه میزان تخلیه بار مورد نیاز است. با کاربرد مدل زنجیره‌های مارکف بر روی مدار کارخانه فرآوری سنگ آهن چادرملو، میزان توزیع بار ثابت در هر یک از واحدهای کارخانه، با توجه به ۳۹۲ تن بار ورودی تخمین زده شده است. بر این اساس، واحد جداکننده‌های مغناطیسی شدت پایین با ۱۱۸ تن ماده معدنی و ۶۴ تن فلز محتوی و واحد خردایش با ۷۶ تن ماده معدنی و ۴۱ تن فلز محتوی به ترتیب، بیشترین تناژ را در خود جای داده‌اند. همچنین واحد فیلتر خلا آپاتیت با ۱۲ تن ماده معدنی و ۶٫۵ تن فلز محتوی، کمترین تناژ را دارا است. نتایج شبیه‌سازی نیز می‌تواند علاوه بر تخمین میزان بار ثابت و شیوه توزیع آن‌ها در هر یک از واحدها، در تعیین میزان بار در گردش نیز بسیار مفید باشد.

## ۶- مراجع

- [۱] نخعی، ف.، عبدالزاده، ع. ا.، ایران‌نژاد، م.؛ ۱۳۹۲؛ "رایه روشی برای بررسی ساختار سیستم اندازه‌گیری مدارهای پیچیده کارخانه‌های فرآوری مواد معدنی-استخراج بخش قابل مشاهده و انجام موازنه جرم". نشریه روش‌های تحلیلی و عددی در مهندسی معدن، شماره ۵، بهار و تابستان ۱۳۹۲، ص ۸۸-۷۷.
- [2] Taylor, H. M., and Karlin, S. (1998). "An introduction to stochastic modelling". (3<sup>rd</sup> Edition), Academic Press, pp. 646.
- [3] Berthiaux, H. (2000). "Analysis of grinding processes by Markov chains". Chemical Engineering Science, 55(19): 4117-4127.
- [4] Mizonov, V. E., Berthiaux, H., Zhukova, V. P., and Bernotatc, S. (2004). "Application of multi-dimensional Markov chains to model kinetics of grinding with internal classification". International Journal of Mineral Processing, 74: 307-315.
- [5] Samanta, B., Sarkar, B., and Mukherjee, S. (2004). "Reliability modelling and performance analyses of an LHD system in mining". The Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy, 104(1): 1-8.
- [۶] جلالی، س. م.، شهریار، ک.، عطایی‌پور، م.؛ ۱۳۸۵؛ "بهینه‌سازی محدوده نهایی معدنکاری روباز با استفاده از زنجیره‌های مارکف". نشریه بین‌المللی علوم مهندسی، دوره هفدهم، شماره ۳، ص ۳۰-۲۳.
- [7] Berthiaux, H., Mizonov, V., and Zhukov, V. (2005). "Application of the theory of Markov chains to model different processes in particle technology". Powder

با ضرب کردن مقادیر  $f_i$  در میزان خوراک کارخانه، توزیع بار در هر یک از اجزای کارخانه فرآوری به نسبت ۳۹۲ تن از بار ورودی به شرح زیر برآورد می‌شود:

$w_1=76,244$ تن	$w_7=21,560$ تن
$w_2=76,244$ تن	$w_8=11,250$ تن
$w_3=34,300$ تن	$w_9=20,344$ تن
$w_4=45,589$ تن	$w_{10}=18,424$ تن
$w_5=41,904$ تن	$w_{11}=12,191$ تن
$w_6=21,560$ تن	$w_{12}=12,191$ تن

در این مرحله می‌توان در صورت خرابی هر واحد و یا توقف کارخانه به هر دلیلی، میزان تناژ موجود در هر واحد را تعیین کرد. عیار متوسط بار ورودی به خطوط فرآوری در معدن سنگ آهن چادرملو به طور متوسط، ۵۴٪ است. در این صورت، بار ورودی حاوی ۲۱۱/۶ تن فلز محتوی خواهد بود. با این شرایط و بر اساس محاسبات انجام شده، توزیع فلز محتوی در واحدها را می‌توان به شرح زیر پیش‌بینی کرد:

- جداکننده‌های مغناطیسی شدت پایین: ۶۳/۸ تن،
- جداکننده‌های مغناطیسی شدت پایین کلینر: ۲۵/۱ تن،
- تیکنر: ۹/۹ تن،
- تیکنرهای لاملا: ۱۷/۷ تن،
- سلول‌های فلوتاسیون: ۲۲/۷ تن،
- فیلتر خلا کنسانتره آهن: ۲۴/۶ تن،
- فیلتر خلا آپاتیت: ۶/۶ تن و
- واحدهای خردایش: ۴۱/۲ تن.

## ۵- نتیجه گیری

در محاسبات موازنه جرم در فرآوری مواد معدنی، در خصوص واحدهای عملیاتی همچون واحدهای سنگ‌شکن و آسیا، سلول‌های فلوتاسیون و انواع سرندها، هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد زمان ماند مواد، مقدار بار در هر لحظه از زمان و عیار یا محتوای فلز بار وجود ندارد. در این مقاله با استفاده از مدل زنجیره‌های مارکف، توزیع بار در هر یک از واحدهای فرآوری و یا احتمال حضور هر ذره یا کانی که مقادیر آن در بار ورودی به کارخانه فرآوری مشخص است را می‌توان برآورد کرد. روش ارائه شده می‌تواند با بهره‌مندی از پشتوانه غنی ریاضی با کاربرد شاخص‌ها و تحلیل‌های احتمالات، به پیش‌بینی توزیع بار و فلز محتوی در مسیرهای بزرگ فرآوری مواد معدنی بپردازد

[19] Cormen, T. H. (2001). "Introduction to Algorithms". 2<sup>nd</sup> Edition, Mc Grow-Hill, pp. 1184.

[۲۰] ابراهیمی، س. ک.، لعلی، ر.؛ ۱۳۹۵؛ "به کارگیری مدل زنجیره های مارکوف گسسته جهت پیش بینی رفتار پرتفوی وام بانکها". نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره چهاردهم، شماره ۴۷، ص ۶۱-۷۶.

[۲۱] میرزایی، ح.، فرزنگان، ا.، میرزایی، ز.؛ ۱۳۹۶؛ "شبیه سازی و بهینه سازی مدار آسیاکنی شرکت روی تیران". نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره پانزدهم، شماره ۵۰، ص ۱۹.

[۲۲] نوع پرست، م.، آرام، م.، فتوحی، ب.، غریبی، خ.؛ ۱۳۸۲؛ "مطالعه و بررسی سایش لاینرهای (ریخته گری و لاستیکی) آسیاهای نیمه خودشکن و گلوله ای در مجتمع معدنی و صنعتی چادرملو". طرح پژوهشی، سازمان توسعه و نوسازی معادن و صنایع معدنی ایران، شرکت معدنی و صنعتی چادرملو.

Technology, 157(1-3): 128-137.

[8] Jalali, S. E., Ataee-pour, M., and Shahriar, K. (2006). "Pit limit optimisation using stochastic process". CIM Bulletin, 99(1024): 1-11.

[9] Wang, Q., Zhang, Y., Chen, C., and Xu, W. (2006). "Open-pit mine truck real-time dispatching principle under macroscopic control". First International Conference on Innovative Computing, Information and Control, Beijing, 702-706.

[۱۰] جلالی، س. م.، ا.، حسینی، س. م.، ع.، نجفی، م.؛ ۱۳۸۸؛ "برآورد تعداد کارگاه های استخراج ذخیره در معدنکاری زیرزمینی با استفاده از فرآیندهای تصادفی". نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر، شماره ۷۰، ص ۵۲-۴۵.

[11] Jalali, S., and Forouhandeh, S. (2011). "Reliability estimation of auxiliary ventilation systems in long tunnels during construction". Safety Science, 49(5): 664-669.

[12] Liu, S. Q., and Kozan, E. (2012). "An interactive planning and scheduling framework for optimising pits-to-crushers Operations". Industrial Engineering and Management Systems, 11: 94-102.

[۱۳] نیکوگفتار، ه.، بحرودی، ع.، تخمچی، ب.، نوروزی غ.، مهرگینی، ب.؛ ۱۳۹۳؛ "مدل سازی با زنجیره مارکوف، مطالعه موردی: رخساره های سنگی یکی از مخازن نفتی جنوب باختر ایران". نشریه علوم و زمین، سال بیست و چهارم، شماره ۹۴، ص ۱۰۲-۹۷.

[۱۴] محمدی، س.، غیاثی، م.، عطایی، م.، پورزمانی، ا.؛ ۱۳۹۵؛ "ارزیابی و تحلیل قابلیت اطمینان دستگاه های حفاری دورانی-مطالعه موردی: معدن سنگ آهن شماره ۱ گل گهر سیرجان". نشریه مکانیک سازه ها و شاره ها، دوره ۶، شماره ۳، ص ۱۹۴-۱۸۵.

[15] Yarmuch, J., Epstein, R., Cancino, R., and Carlos Peña, J. (2017). "Evaluating crusher system location in an open pit mine using Markov chains". International Journal of Mining, Reclamation and Environment, 31(1): 24-37.

[16] Ghosh, P., Mukhopadhyay, A., Chanda, A., Mondal, P., Akhand, A., Mukherjee, S., Nayak, S. K., Ghosh, S., Mitra, D., Ghosh, T., and Hazra, S. (2017). "Application of Cellular automata and Markov-chain model in geospatial environmental modeling- A review". Remote Sensing Applications: Society and Environment, 5: 64-77.

[17] Agrawal, A. K., Murthy, V. M. S. R., and Chattopadhyaya, S. (2019). "Investigations into reliability, maintainability and availability of tunnel boring machine operating in mixed ground condition using Markov chains". Engineering Failure Analysis, 105: 477-489.

[18] Lipschutz, S. (2000). "Theory and problems of probability". Schaun's outline series, McGraw Hill, pp. 320.

<sup>1</sup> Mass Fraction

<sup>2</sup> Stochastic Processes

<sup>3</sup> Probability

<sup>4</sup> Markov Chains

<sup>5</sup> Kinetics Modeling

<sup>6</sup> State Space

<sup>7</sup> Fixed Vector

<sup>8</sup> Probability Vector

<sup>9</sup> Stochastic Matrices

<sup>10</sup> Regular Stochastic Matrix

<sup>11</sup> Unique

<sup>12</sup> Stationary state

<sup>13</sup> Directed

<sup>14</sup> Weighted

<sup>15</sup> Stacker

<sup>16</sup> Windrow

<sup>17</sup> Reclaimer

<sup>18</sup> SAG mill

<sup>19</sup> LIMS

<sup>20</sup> Cleaner LIMS

<sup>21</sup> High Gradient Magnetic Separater (HGMS)

<sup>22</sup> Gauss

<sup>23</sup> Vacuum

<sup>24</sup> Lamela



Imam Khomeini International University  
Vol. 5, No. 2, Summer 2020, pp. 26-29



نشریه مهندسی منابع معدنی  
Journal of Mineral Resources Engineering  
(JMRE)

DOI: 10.30479/jmre.2020.10200.1237

## Feed Distribution Probabilistic Estimation in Mineral Processing Units Using Markov Chains

Noroozi M.<sup>1\*</sup>, Jalali S.E.<sup>2</sup>, Azizi A.<sup>3</sup>

- 1- Assistant Professor, Faculty of Mining Engineering, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
mnoroozi.mine@gmail.com
- 2- Associate Professor, Faculty of Mining Engineering, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
jalalisme@gmail.com
- 3- Associate Professor, Faculty of Mining Engineering, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
azizi.asghar22@yahoo.com

(Received: 01 Mar. 2019, Accepted: 01 Feb. 2020)

**Abstract:** In the conventional mass balance methods, sampling are carried out to determine the metal content, solid percentage and particle size distribution in the paths (branches) and ultimately the corresponding errors are dispersed. In these methods, there is no information about the amount of feed and the grade (or the metal content) at any moment of time for each mineral processing unit (plant equipment). Thus, in this paper, the quantitative and qualitative values of input feed to each of the operating units in the processing paths were probabilistically investigated using stochastic process theory, and consequently the load distribution in these units was estimated. For this purpose, the processing plant was firstly modeled as a directional and balanced graph. In this graph, each node represents an operating unit and each edge displays a path between two units. The weight of each edge also indicates the passing material weight from the node to another node, which is assigned as a random variable at a specified interval. After modeling the process, the obtained graphical model containing random parameters was analyzed using Markov chain theory. Applying the philosophy outlined in this paper, not only the load distribution, but also the presence probability of each particle or mineral in each of the operational units of the processing plant can be predicted. It is also possible to estimate the tonnage in each unit when the plant is shut down and even the necessary steps are provided to discharge them. In this research, Chadormalu iron ore processing line was modeled using method presented and the results were analyzed and thereafter were reported using probabilistic parameters.

**Keywords:** Mineral processing, Feed distribution, Modeling, Stochastic processes, Markov chain.

### INTRODUCTION

The purpose of this paper is to present a methodology including the probabilistic and time-dependent

properties for estimating the fixed load value in each mineral processing plant unit. With the help of this methodology, not only the feed distribution, but also the probability of the presence of any particle or mineral, which their values are specified at the input load to the processing paths can be estimated in each operating unit. In addition, the tonnage available in each unit can be predicted using the presented method at the plant stop times. Also, the tonnage value available in each unit can be predicted when the plant stops for any reason and the equipment needs repair and replacement. The methodology developed in this paper is implemented on Chadormalu iron ore processing plant as a case study.

Mizonov et al. investigated the application of multidimensional Markov chain for kinetic modelling of comminution. They suggested a two-dimensional Markov chain model to describe particle transport along the main coordinates in a mill and particle transport from one sector to another [1]. Jalali et al. [2] applied Markov Chain Modelling to optimize open pit mining confine and to estimate the number of stopes in underground mining. Yarmuch et al. studied the position of crusher systems in an open pit mine using Markov chains [3]. Ghosh et al. reviewed Markov chain models and expressed that nowadays Markov chain modelling is used in various branches of science and is widely received the numerous applications in the field of earth sciences [4].

## METHODS

In present paper, the quantitative and qualitative values of input loads at each operational unit are determined using Markov chain theory as probabilistic and path-dependent values. For this purpose, firstly, each section of the mineral processing path is defined as a random process, and then the estimation of the load distribution in different paths is examined using Markov chains. In each mineral processing plant, the components of the plant and their relationship can be represented using a directed and weighted graph. Each graph is made up of a series of nodes and a number of edges, which indicate the relationship between the nodes. Each edge also has a specific direction and a value that represents the weight between two nodes.

In this graph, each node represents an operating unit in the mineral processing plant, which indicates a state of a Markovian system, and each edge depicts the processing path between two nodes assumed. The weight of each edge can be also simulated as the passing material weight in a path from a node to another. Each unit of time is regarded as a set of  $I = \{0,1,2,\dots\}$  in a random process in term of hours. Therefore with prolonging time, a random variable of  $N_i$  is generated for each member of set I, which its value can be assumed corresponding to the passing material percentage from each node. At each time unit, the Markovian device goes one step further and a new distribution of the input load is generated on each node. The device returns to its steady state distribution with prolonging time. Thus, the load distribution is determined at each node of the graph or, in other words, at each operating unit of the processing plant.

## FINDINGS AND ARGUMENT

The graph shown in Figure 1 was plotted according to the Chadormalu mine iron ore processing plant with a processing capacity of 392 tons per hour. Considering this graph, the probability of load transfer from any component of the processing line to the other can be calculated based on the mass balance. For example, 100% of the input load is transferred from step 6 into step 7. Therefore, the corresponding element in the transfer matrix is inserted equal to 1. Similarly, 51.43 and 48.57% of the load reached to stage 5 is transferred to stage 6 and 9, respectively. According to the graph of Figure 1, with investigating each stage of the processing plant, the corresponding transfer matrix can be defined as the matrix of Figure 2.

Now, Markov chain steady distribution (the constant vector of the transfer matrix) can be calculated using equations 1 and 2. In this matrix, each element represents the percentage of present load, or in other words, the load distribution at each stage of the processing path.

$$t \times w = t \quad (1)$$

$$t = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}]$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2)$$

In terms of the input load of 392 tones, the load distribution in each component of the processing plant is estimated as follows:

- $w_1 = 76.244 \text{ ton}$
- $w_2 = 76.244 \text{ ton}$
- $w_3 = 34.3 \text{ ton}$
- $w_4 = 45.5896 \text{ ton}$
- $w_5 = 41.9048 \text{ ton}$
- $w_6 = 21.56 \text{ ton}$
- $w_7 = 21.56 \text{ ton}$
- $w_8 = 11.2504 \text{ ton}$
- $w_9 = 20.3448 \text{ ton}$
- $w_{10} = 18.424 \text{ ton}$
- $w_{11} = 12.1912 \text{ ton}$
- $w_{12} = 12.1912 \text{ ton}$

Now, it is possible to determine the amount of tonnage in each unit when each unit destroys or the factory stops for any reason.

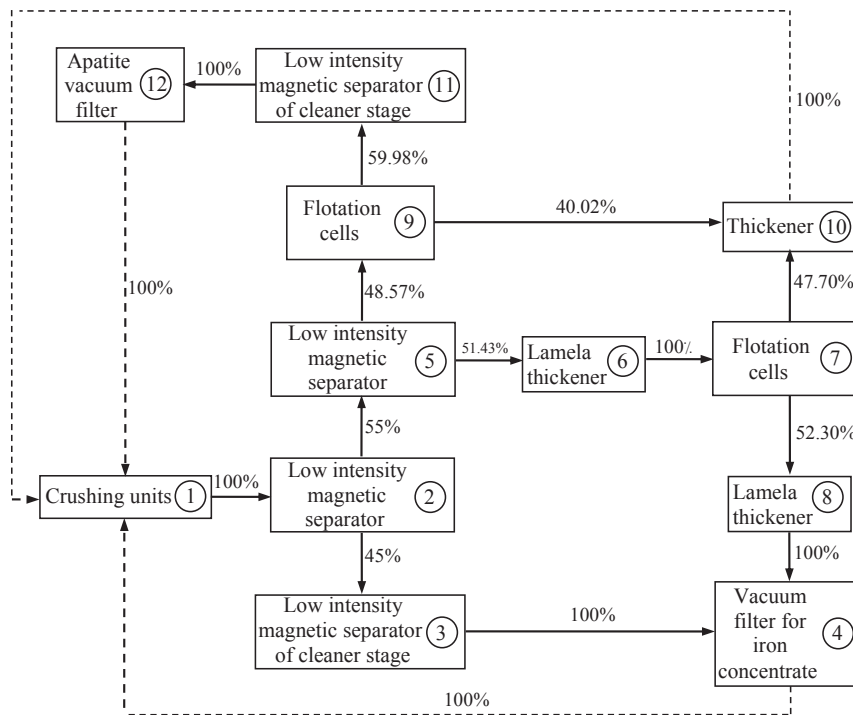


Figure 1. Simulation of Mineral Processing Plant Using directed weighted Graph

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$
$a_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_2$	0	0	0.45	0	0.55	0	0	0	0	0	0	0
$a_3$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_4$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_5$	0	0	0	0	0	0.5143	0	0	0.4857	0	0	0
$a_6$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$a_7$	0	0	0	0	0	0	0	0.5230	0	0.477	0	0
$a_8$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4002	0.5998	0
$a_{10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$a_{12}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 2. Transfer matrix corresponding to graph of Figure 1

The average grade of input load to the processing plant at Chadormalu iron ore mine is 54%. Therefore, the input load will contain 211.6 tons of metal. In this state, based on the calculations, the distribution of metal content in the units can be predicted as follows:

- Low intensity magnetic separator 63.8 ton,
- Low intensity magnetic separator of cleaner stage 25.1 ton,
- Thickener 9.9 ton,
- Lamella thickeners 17.7 ton,
- Flotation cells 22.7 ton,
- Vacuum filter for iron concentrate 24.6 ton,
- Apatite vacuum filter 6.6 ton,
- Comminution units 41.2 ton

## CONCLUSIONS

In this paper, the load distribution in each processing unit or the probability of the presence of any particle or mineral was estimated using Markov chain model. The proposed method could predict the load distribution and metal content in large paths of mineral processing plant applying a rich mathematical support and probabilistic analysis. In this regards, when the plant stops and the equipment needs repair and replacement, it could be predicted how much tonnage there was in each unit and how much discharge was required. Applying Markov chain model on the circuit of the Chadormalu iron ore processing plant, the value of load distribution was estimated in each plant unit based on 392 tons of input feed. Accordingly, low intensity magnetic separator unit with 118 tons of minerals and 64 tons of metal content and the crushing unit with 76 tons of minerals and 41 tons of metal content had the highest tonnage, respectively. Also, apatite vacuum filter unit with 12 tons of minerals and 6.5 tons of content metal had the lowest tonnage.

## REFERENCES

- [1] Mizonov, V. E., Berthiaux, H., Zhukova, V. P., and Bernotatc, S. (2004). "Application of multi-dimensional Markov chains to model kinetics of grinding with internal classification". International Journal of Mineral Processing, 74: 307-315.
- [2] Jalali, S. E., Ataee-pour, M., and Shahriar, K. (2006). "Pit Limit Optimisation Using Stochastic Process". CIM Bulletin, 99(1024): 1-11.
- [3] Yarmuch, J., Epstein, R., Cancino, R., and Carlos Peña, J. (2017). "Evaluating crusher system location in an open pit mine using Markov chains". International Journal of Mining, Reclamation and Environment, 31(1): 24-37.
- [4] Ghosh, P., Mukhopadhyay, A., Chanda, A., Mondal, P., Akhand, A., Mukherjee, S., Nayak, S. K., Ghosh, S., Mitra, D., Ghosh, T., and Hazra, S. (2017). "Application of Cellular automata and Markov-chain model in geospatial environmental modeling-A review". Remote Sensing Applications: Society and Environment, 5: 64-77.